

Л. Аллен, Дж. Эберли

*ОПТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
И ДВУХУРОВНЕВЫЕ
АТОМЫ*

Перевод с английского

Т. М. Ильиновой и М. С. Стрижевской

Под редакцией

В. Л. Стрижевского

Издательство «Мир»

Москва 1978

В монографии рассматриваются закономерности взаимодействия квазимонохроматического импульсного лазерного излучения с двухуровневой системой в условиях, близких к точному резонансу. Это — первая и пока единственная монография, посвященная указанному вопросу. Изложение ведется в рамках формализма, который позволяет описать двухуровневую систему во внешнем электрическом поле аналогично спину $1/2$ во внешнем магнитном поле, когда выбранные динамические переменные удовлетворяют оптическим уравнениям Блоха. Применение этих уравнений к решению обширного круга различных конкретных задач занимает значительную часть монографии.

Книга будет полезна широкому кругу читателей — физикам-теоретикам и физикам-экспериментаторам, инженерам, работающим в области квантовой оптики и радиофизики, а также преподавателям, аспирантам и студентам при изучении указанных вопросов.

Редакция литературы по физике

А $\frac{20405-052}{041(01)-78}$ 52-78

Copyright © 1975 John Wiley & Sons, Inc. Authorised translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1978

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Что такое двухуровневый атом? Такого объекта в природе, строго говоря, не существует. Зато существует возможность реализовать достаточно острую настройку частоты воздействующего на атом внешнего электромагнитного излучения в резонанс с частотой перехода между определенной парой его уровней энергии. В этих условиях влияние остальных уровней гораздо менее существенно или даже пренебрежимо мало, и мы получаем возможность ограничиться рассмотрением только двух выделенных уровней. В итоге и возникает полезная модель двухуровневого атома. Ситуации такого рода реализуются очень часто и поэтому требуют специального анализа.

Подобный анализ уже довольно давно выполнен применительно к явлениям магнитного резонанса, т. е. к явлениям резонансного взаимодействия системы магнитных моментов атомов (молекул, ионов), помещенных в статическое (или квазистатическое) магнитное поле, с переменным электромагнитным полем. Соответствующая область частот отвечает радиодиапазону, а исследования магнитного резонанса составляют несколько обширных ветвей радиоспектроскопии. Приоритет магниторезонансных явлений обусловлен тем, что в радиодиапазоне давно уже существуют электронные генераторы достаточно мощного когерентного излучения. В оптическом же диапазоне такого рода генераторы мощного когерентного излучения появились только с созданием лазеров в 1960 г.

Использование лазерных источников позволило и в оптике реализовать ситуацию, когда двухуровневая система сильно возбуждается резонансным (или квазирезонансным) электромагнитным полем. Это дало возможность, в частности, наблюдать оптические аналоги многих явлений, ранее изучавшихся в случае магнитного резонанса: затухание свободной поляризации, оптическую нутацию, фотонное эхо и др. Следует, однако, подчеркнуть, что аналогия между явлениями оптического и магнитного резонанса носит ограниченный характер. Действительно, в оптическом случае возникают принципиально новые закономерности, обусловленные эффектами распространения волн, которые, как правило, отсутствовали в магнитном резонансе (длина волны оптического излучения в отличие от излучения радиодиапазона обычно значительно меньше размеров области взаимодействия поля с атомами). Систематическому анализу закономерностей, возникающих при взаимодействии мощного когерентного квазирезонансного оптического излучения с двухуров-

невыми системами, и посвящена предлагаемая советскому читателю монография известных зарубежных физиков Л. Аллена и Дж. Эберли «Оптический резонанс и двухуровневые атомы».

Книга посвящена в основном изложению идейно-теоретических основ рассматриваемых явлений. Экспериментальные результаты привлекаются, как правило, лишь в иллюстративных целях. Исключение составляют, пожалуй, лишь эксперименты по самоиндуцированной прозрачности для оптических импульсов, обсуждение которых (включая и методические аспекты) занимает большую часть гл. 5. Изложение материала характеризуется высоким научным уровнем и удачно в методическом отношении. Ценою разумного, вполне оправданного упрощения (но отнюдь не до примитивного уровня) в постановке задачи и конкретизации частных моделей авторам, как правило, удается четко выделить главные аспекты и избежать усложнений, обусловленных второстепенными обстоятельствами. Систематически дается качественная физическая трактовка основных результатов, что не только облегчает их понимание, но и способствует дальнейшим самостоятельным размышлениям читателя.

Изложению существа дела предпослана фактически вводная гл. 1, содержащая классическую теорию резонансных оптических явлений, которая основана на рассмотрении колебаний классического осциллятора под действием квазирезонансного электрического поля. Хотя последовательное, правильное описание резонансных явлений возможно только в рамках квантовой теории (классическая теория не позволяет учесть эффекты, связанные со значительным заселением возбужденного уровня, в частности эффекты насыщения), классический анализ ряда вопросов, которые затем обсуждаются с квантовомеханической точки зрения (оптическая теорема площадей, распространение сверхкоротких импульсов с малыми потерями и др.), безусловно, способствует более глубокому их пониманию. При этом классическая теория специально изложена в нестандартной форме, удобной для сравнения с квантовой теорией.

Центральное место в изложении общих основ квантовой теории оптического резонанса занимают гл. 2—4. В гл. 2 обоснован и изложен формализм оптических уравнений Блоха, позволяющих описывать двухуровневую систему в заданном внешнем квазирезонансном электрическом поле подобно спине $1/2$ во внешнем квазирезонансном магнитном поле. Третья глава посвящена анализу важного случая постоянного резонансного поля, или поля в виде прямоугольных импульсов. Здесь впервые вводятся, в частности, важное понятие «площадь импульса» и феноменологические постоянные затухания, которые отвечают однородному и неоднородному уширению резонансной линии поглощения, а также релаксации инверсной заселенности; проанализи-

рованы эффекты затухания свободной поляризации, оптической нутации и адиабатического прохождения.

Гл. 4 посвящена эффектам распространения импульсов, специфичным для оптического случая. Центральное место здесь занимают нелинейная «теорема площадей» Мак-Колла — Хана и рассмотрение самоиндуцированной прозрачности для π -импульсов, распространяющихся в виде солитонов. Обсуждается также влияние фазовой модуляции импульсов и циркулярной поляризации падающего излучения. К гл. 4 примыкает по смыслу гл. 5, в которой анализируются результаты экспериментальных исследований самоиндуцированной прозрачности, а также обсуждаются эффекты вырождения энергетических уровней и (очень бегло) π -импульсы в лазерах с синхронизацией мод. Обстоятельно сравниваются экспериментальные проявления самоиндуцированной прозрачности и некогерентного насыщения и обсуждаются возможные способы дискриминации этих эффектов. Теоретические аспекты некогерентного насыщения подробно изложены в гл. 6, в которой выполнен соответствующий предельный переход от оптических уравнений Блоха к кинетическим (скоростным) уравнениям, описывающим некогерентное насыщение, и аналогичный переход для уравнений поля. Здесь же проанализированы некоторые возможности нелинейной спектроскопии на основе некогерентного насыщения, в частности зондирование контура неоднородного уширения методом «выжигания дырок», а также эффекты распространения волны в насыщенной среде — ее ослабление или усиление, дисперсия и самофокусировка и др.

В гл. 2—6 квантовая механика применяется только для описания вещества, в то время как электромагнитное поле описывается в основном классически. В следующих двух главах рассматриваются интересные и важные эффекты, описание которых возможно лишь при квантовании также и электромагнитного поля, т. е. в рамках квантовой электродинамики. В частности, в гл. 7 проанализирована проблема Джейнса — Каммингса: взаимодействие (с учетом спонтанного излучения) одиночного двухуровневого атома с одной резонансной модой поля. Кроме того, в ней изложена теория спонтанного излучения такого атома, взаимодействующего с континуумом мод поля (т. е. теория радиационного затухания возбужденного состояния и лэмбовского сдвига линий излучения и поглощения для двухуровневого атома). Гл. 8 посвящена очень важной проблеме сверхизлучения Дике, т. е. кооперативного спонтанного излучения системы из N атомов, интенсивность которого пропорциональна N^2 , а не N .

Наконец, заключительная, девятая глава посвящена чрезвычайно интересной и важной проблеме фотонного эха — аналога хорошо известного в радиоспектроскопии спинового эха. Авторы

подробно анализируют прежде всего качественную сторону дела, различные особенности временного поведения эха в газах и твердых телах, распространение импульсов эха, его экспериментальное наблюдение и т. д.; излагается также методика количественного описания фотонного эха на основе оптических уравнений Блоха.

Таким образом, в данной книге изложен весьма широкий круг вопросов, большинство которых находится сейчас на переднем крае современной квантовой электроники. Последнее обстоятельство особенно повышает актуальность книги Л. Аллена и Дж. Эберли. В соответствии с тем, что достаточно мощные импульсы лазерного излучения на практике являются и достаточно короткими, авторы, исследуя различные процессы резонансного взаимодействия двухуровневых систем с оптическим излучением, повсюду уделяют первостепенное внимание существенно нестационарному режиму протекания указанных процессов, когда длительность импульса сравнима с соответствующими временами релаксации или меньше их.

Следует отметить, что в монографии практически не отражен ряд важных вопросов, интенсивно исследуемых в последние годы и достаточно тесно связанных с содержанием книги. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы резонансного взаимодействия мощных коротких импульсов с экситонными системами и с полупроводниками в области межзонных переходов, импульсные многофотонные резонансные процессы (резонансы двухфотонного поглощения, солитоны вынужденного комбинационного рассеяния света и др.), вопросы формирования сверхкоротких лазерных импульсов, различные аспекты практического применения рассматриваемых явлений (например, лазеры на сверхизлучении, резонансная динамическая голография, модуляционная эхоспектроскопия и т. д.), родственные эффекты для волн иного типа (например, акустических; поляризационное эхо в порошках пьезоэлектриков) и др. Цитируемая литература во многих случаях неполна и отражает, по-видимому, индивидуальные научные интересы авторов. Имеются лишь единичные ссылки на работы советских ученых, хотя среди них немало принципиально важных работ. Так, в гл. 9, посвященной фотонному эху, отсутствуют ссылки на работы советских исследователей Коппиллема и Нагибарова, которые фактически впервые предсказали в 1962 г. явление фотонного эха (см. [15*] в гл. 9).

Чтобы в какой-то мере помочь читателю, мы существенно расширили список литературы, включив в него, в частности, работы по вопросам, перечисленным выше, и дополнили авторский текст соответствующими подстрочными примечаниями. Они предназначены прежде всего для ориентировки читателя в дополни-

тельной литературе (последняя помечена звездочкой) либо содержат некоторые уточнения и комментарии к тексту.

Необходимо отметить, что проблема резонансного возбуждения вещества мощным когерентным лазерным квазимонохроматическим излучением (в частности, в целях исследования вещества и процессов его взаимодействия с полем) в настоящее время уже очень обширна и имеет много различных направлений. Среди них имеются важные и уже хорошо развитые направления, которые, находясь, вероятно, относительно далеко от интересов авторов, почти не отражены в книге. Примерами могут служить резонансные когерентные нелинейно-оптические процессы преобразования частот в газах и конденсированных средах; резонансное селективное возбуждение вещества с целью активации различных процессов, в особенности стимулирования химических (например, для разделения изотопов) и биологических реакций; когерентная активная спектроскопия комбинационного рассеяния света на колебаниях молекул и кристаллов, а также на объемных и поверхностных поляритонах; спектроскопия сверхвысокого разрешения на основе квантовой интерференции состояний; спектроскопия сложных молекул, селективно возбуждаемых в полосе неоднородного уширения, и т. д. Этот перечень можно было бы продолжить, но естественно, что охватить все эти вопросы в рамках одной книги невозможно.

Книга Л. Аллена и Дж. Эберли написана в расчете на сравнительно широкий круг читателей. Она, безусловно, будет полезной физикам-исследователям (как теоретикам, так и экспериментаторам) и инженерам, работающим в области квантовой оптики и радиофизики, преподавателям, аспирантам и студентам при изучении указанных дисциплин. Хотя оптический резонанс как явление, связанное с внутренней природой атомов и молекул, носит фактически квантовый характер, основные уравнения его во многих случаях по форме не очень сильно отличаются от соответствующих классических уравнений, поэтому даже лица, сравнительно слабо знакомые с квантовой механикой, смогут в них разобраться.

Учитывая достоинства данной монографии, а также тот факт, что она является первой и пока единственной на данную тему, можно не сомневаться в том, что ее издание на русском языке принесет пользу широкому кругу советских читателей.

Гл. 1—3 переведены Т. М. Ильиновой, остальная часть книги — М. С. Стрижевской. Перевод данной книги на русский язык и ее издание в СССР осуществлены по инициативе академика Р. В. Хохлова, который выдвинул идею резонансного воздействия мощного когерентного излучения на вещество и внес значительный вклад в ее реализацию.

В. Л. Стрижевский

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В 1958 г. в мире физики произошло событие большой важности: Шавлов, Таунс и А. М. Прохоров сформулировали идею о том, что мазер может работать на оптических частотах. В течение последующего десятилетия успешное использование первых оптических мазеров, или лазеров, привело к появлению совершенно новых областей физики и нарастающей волны соответствующих технических применений. Лазерная физика проникла в столь различные области, как статистика фотонов и микросварка, измерение геометрических величин и двухфотонное поглощение. Теория стационарного режима лазеров интенсивно развивается на основе таких различных формализмов, как полуклассические кинетические уравнения и уравнения статистической квантовой электродинамики. Осуществляется экспериментальная проверка теории стационарного режима и одновременно развиваются практические методы повышения интенсивностей и укорочения лазерных импульсов.

Сейчас, в конце второго десятилетия существования лазерной физики, интерес к этой области продолжает нарастать, и научные журналы всего мира по-прежнему захлестывает поток статей, содержащих новые результаты как фундаментального, так и прикладного характера. Одним из наиболее важных достижений явилось создание лазеров на органических красителях, которые дают высокую мощность и узкие линии буквально во всем оптическом диапазоне. В настоящее время можно исследовать любой оптический резонанс в очень узком спектральном интервале. В непосредственной близости к резонансу у всех поглощающих диэлектриков обнаруживаются закономерности, совершенно чуждые классическим, лоренцевским представлениям. Некоторые из этих квазирезонансных оптических явлений имеют тесные аналоги в ядерном и электронном спиновом резонансах. Сюда относятся такие эффекты, как оптическая нутация, фотонное эхо и распад свободной поляризации. Вместе с тем многие другие эффекты, в частности связанные с распространением мощных импульсов излучения, специфичны для оптического диапазона частот.

Настоящая монография писалась с учетом всех этих эффектов. Мы ограничились рассмотрением резонансного и квазирезонансного взаимодействия когерентного света с двухуровневыми атомами. В той мере, в какой верно, что резонансное взаи-

модействие вызывает только один переход в атоме, последний можно считать имеющим только два уровня энергии, а лазерное излучение — монохроматическим. Несомненно, что эти два приближения являются очень хорошими для большинства лазеров и большинства атомов и вполне адекватны для понимания физической сути различных когерентных нестационарных явлений. Поэтому мы всюду используем двухуровневое приближение для атомов, а эффекты немонохроматичности учитываем только при обсуждении распространения импульсов, теоремы площадей и самоиндуцированной прозрачности.

При написании настоящей книги было целесообразно сосредоточиться на физической сущности резонансных явлений, поэтому мы не обсуждаем деталей большинства последних экспериментальных и теоретических работ в данной области. В наших целях отклик квазирезонансных атомов на внешнее поле адекватно описывают оптические уравнения Блоха с затуханием, введенным феноменологически. Аналогично для описания широкого класса эффектов поглощения и усиления оказывается вполне достаточно классического волнового уравнения Максвелла для электрического поля. По сути дела, речь идет о нахождении и анализе (без излишней софистики) решений взаимосвязанных уравнений Блоха и Максвелла.

Мы начнем с обсуждения элементов оптического резонанса, содержащихся в классической теории дисперсии. Такое обсуждение позволяет выработать основу для физической интерпретации соответствующих квантовомеханических уравнений, которые вводятся далее. Гл. 2 содержит описание полуклассической теории излучения и ее применения к двухуровневым атомам. В гл. 3 вводятся оптические уравнения Блоха, составляющие основу почти всего последующего анализа. В гл. 4 к оптическим уравнениям Блоха присоединяются уравнения Максвелла, что позволяет описывать эффекты распространения, а в гл. 5 дается обзор экспериментов по распространению когерентных импульсов. Связь между полностью когерентными связанными уравнениями Максвелла — Блоха и хорошо известными полуклассическими скоростными уравнениями устанавливается в гл. 6; она используется для обсуждения явлений насыщения. Квантование поля излучения привлекается впервые в гл. 7 при обсуждении проблемы Джейнса — Каммингса и одноатомных сдвига частоты и времени жизни. Многоатомные спонтанные кооперативные эффекты кратко рассматриваются в гл. 8, а гл. 9 посвящена полуклассическому анализу фотонного эха.

Ясно, что по оптическому резонансу и двухуровневым атомам очень скоро появятся новые важные результаты. Они пополнят материал, который так или иначе оказался за рамками данной книги. Тем не менее мы надеемся, что книга будет какое-то

время полезным вводным руководством, в частности, для лиц, начинающих исследования по квантовой оптике и нуждающихся в физической интерпретации основных закономерностей оптического резонанса.

Именно в расчете на таких читателей мы последовательно используем, когда необходимо, квантовомеханическое рассмотрение в представлении Гейзенберга, поскольку гейзенберговская картина схематически почти всегда ближе к классической физике, чем шредингеровская. Это связано с тем, что в представлении Гейзенберга используются непосредственно динамические переменные, а не амплитуды вероятностей и функции состояний. Полуклассические оптические уравнения Блоха, занимающие центральное место в теории резонансных явлений, возникают в представлении Гейзенберга прямо и естественно

Конечно, атомная физика и, следовательно, оптический резонанс являются квантовыми по самой природе. Поэтому уравнения, описывающие дипольные моменты, напряженности электрических полей, атомную инверсию, энергию поля и т. д., с которыми приходится иметь дело, существенным образом содержат постоянную Планка. Однако по форме эти уравнения обычно не очень сильно отличаются от уравнений, обычно встречающихся в классической физике, и поэтому часто могут рассматриваться как аналоги уравнений, известных, например, из лоренцевской теории диэлектриков или анализа нелинейных цепей. Мы надеемся, что даже читатели, относительно слабо знакомые с квантовой физикой, смогут без особых трудностей следить за обсуждением когерентных нестационарных процессов, нелинейного распространения когерентных импульсов, эффектов насыщения и явлений эха.

Вообще все книги обязаны своим появлением не только их авторам, но и широкому кругу других лиц. Мы очень признательны тем физикам, с которыми мы многократно обсуждали различные вопросы, отраженные в данной книге: Г. Джонсу, П. Найту, Л. Манделю, К. Страуду и Б. Вольфу. Мы глубоко признательны также всем тем, кто помог нам в проведении иллюстративных численных расчетов и в техническом оформлении книги.

Сассекс, Англия
Рочестер, США, шт. Нью-Йорк
Август 1974 г.

*Л. Аллен
Дж. Эберли*

Глава 1

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ОПТИКИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Классическую теорию линейного взаимодействия света с веществом создал в основном Г. А. Лоренц. Именно Лоренц последовательно развил идею о том, что оптические явления возникают вследствие движения элементарных зарядов и диполей, которые, будучи более или менее свободными, реагируют на электрические и магнитные поля световых волн. Эта точка зрения теперь общепринята и служит отправным пунктом любой современной теории оптических свойств диэлектриков.

На практике классическую теорию Лоренца и ее следствия требуется изменять только в наиболее экстремальных ситуациях. Так, классические формулы Рэлея и Томсона для оптического рассеяния приходится заменять квантовомеханической формулой Комптона только тогда, когда длина волны рассеиваемого света попадает в рентгеновский диапазон. Классические формулы Лоренца, описывающие дисперсию и поглощение, справедливы и при квантовомеханическом рассмотрении; впервые их вывели в рамках квантовой механики Крамерс и Гейзенберг, которые применили принцип соответствия. Только в очень интенсивных полях, когда становятся существенными внутриатомные нелинейности, возникают заметные отклонения от предсказаний дисперсионной теории Лоренца — Крамерса — Гейзенберга.

Считая, что читатель знаком с лоренцевским приближением осциллирующего электрона, мы приводим в последующих параграфах этой главы обзор теории Лоренца (в необычных, правда, обозначениях). Этот обзор нужен по двум причинам. Во-первых, полезно иметь классические формулы под рукой для сравнения с квантовомеханическими выражениями, которые выводятся в последующих главах. Такое сравнение позволяет выявить, в какой мере квантовым является тот или иной результат. Во-вторых, введение в чисто классическом контексте основных обозначений, квазирезонансного приближения и физических явлений, которые изучаются в дальнейшем квантовомеханически, облегчит понимание этих явлений. Поэтому в настоящей главе,

кроме показателя преломления и коэффициента поглощения, обсуждается так называемая проблема Раби, затухание свободной поляризации, теорема «площадей» и распространение ультракоротких импульсов.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЙ ДИПОЛЬНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Согласно Лоренцу [1], большинство оптических явлений можно объяснить взаимодействием связанных электрических зарядов с электромагнитным полем. В качестве отправной точки примем, что эти заряды содержатся в нейтральных атомах и осциллируют около определенных положений равновесия с малыми амплитудами. Иначе говоря, каждая электрон-ионная пара ведет себя как простой гармонический осциллятор, который взаимодействует с электромагнитным полем посредством своего электрического дипольного момента. Движение ансамбля таких дипольных осцилляторов, соответствующих газу или другой диэлектрической системе, определяется функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_a (p_a^2 + \omega_a^2 m^2 r_a^2) - e \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_a), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{r}_a$ — канонические импульс и радиус-вектор диполя a , имеющего собственную частоту ω_a ; $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_a)$ — напряженность электрического поля вблизи атома a в момент времени t .

Уравнение движения для единственного атомного дипольного осциллятора очень простое. Его простейшая форма отвечает предположению, что данная компонента вектора $\mathbf{r}_a$ связана только с соответствующей компонентой поля $\mathbf{E}$. Это позволяет заменить векторную задачу скалярной. Пусть скалярные величины x_a и E образуют пару связанных компонент. Канонические уравнения, записанные при помощи скобок Пуассона,

$$\dot{x}_a = \{x_a, \mathcal{H}\}, \quad \dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}\}, \quad (1.2)$$

либо просто уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_a}, \quad \dot{q}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} \quad (1.3)$$

приводят к хорошо известному результату

$$\ddot{x}_a + \omega_a^2 x_a = \frac{e}{m} E(t, \mathbf{r}_a), \quad (1.4)$$

где в правой части учтена только электрическая часть силы Лоренца для нерелятивистского электрона. В релятивистском пределе магнитная сила $(e/c)\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}$ не является малой и должна быть включена в уравнение (1.4). В рассматриваемом нами нерелятивистском случае магнитной силой можно пренебречь.

Одним из самых существенных свойств дипольного осциллятора является то, что он излучает электромагнитную энергию. Поэтому даже при отсутствии во всей Вселенной других зарядов и токов, создающих поле $\mathbf{E}$ в точке $\mathbf{r}_a$, существовало бы поле, обусловленное собственным излучением диполя. Осознав этот факт, Лоренц поставил важную задачу: самосогласованным образом учесть действие поля, создаваемого осциллятором, на его собственное движение. Один из простейших возможных путей состоит в использовании закона сохранения энергии: энергия, излучаемая в поле, должна быть равна энергии, теряемой осциллятором. Такой учет самосогласованной реакции излучения приводит к ряду важных следствий.

Поскольку масса нейтрального атома велика и он как целое движется медленно по сравнению с осциллирующим электроном, центр колебаний можно считать практически неподвижным. При этом закон сохранения энергии для системы электромагнитное поле — осциллятор можно представить в следующей локальной форме ([2], разд. 1.1.4):

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \frac{\partial U_{mat}}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга, U_{em} — плотность энергии электромагнитного поля и U_{mat} — плотность энергии вещества. Интегрируя (1.5) по объему малой сферы с центром в осцилляторе, мы от уравнения для плотности энергии (1.5) переходим к уравнению для самой энергии:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA + \frac{\partial W_{em}}{\partial t} + \frac{\partial W_{osc}}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

При получении (1.6) объемный интеграл $\int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV$ был преобразован в интеграл по поверхности сферы $\mathcal{A}$.

Как мы увидим далее, диполь теряет энергию на излучение относительно медленно: существенная потеря энергии происходит лишь на протяжении времени, большого по сравнению с $2\pi/\omega_a$. Отсюда вытекает, во первых, что количество электромагнитной энергии в малом объеме $\mathcal{V}$ на протяжении длительного времени остается приблизительно постоянным. Это означает, что слагаемым $\partial W_{em}/\partial t$ в (1.6) можно пренебречь. Во вторых, становится ясным, что колебания диполя почти гармонические, поэтому энергия a -го осциллятора приблизительно равна

$$W_a(t) = m\omega_a^2 \overline{x_a^2(t)}, \quad (1.7)$$

где черта означает усреднение по быстрым колебаниям с частотой $2\omega_a$.

Скорость излучения энергии диполем через сферу с центром на диполе хорошо известна из классической электродинамики ([2], разд. 2.2.3):

$$\int \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} dA = \frac{2e^2\omega_a^4}{3c^3} \overline{x_a^2(t)}. \quad (1.8)$$

С учетом (1.7) ее можно записать как

$$\int \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} dA = \frac{2e^2\omega_a^2}{3mc^3} W_a(t).$$

Другими словами, она пропорциональна энергии самого диполя. Таким образом, уравнение (1.6), выражающее закон сохранения энергии, эквивалентно простому уравнению для энергии диполя

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = -\frac{2}{\tau_0} W_a. \quad (1.9)$$

Ясно, что в пределах применимости указанных приближений колебания затухают экспоненциально,

$$W_a(t) = W_a(0) e^{-2t/\tau_0}, \quad (1.10)$$

причем относительная скорость затухания энергии равна

$$\frac{2}{\tau_0} = \frac{2e^2\omega_a^2}{3mc^3}.$$

Если диполь осциллирует с оптической частотой, то естественное время жизни τ_0 , предсказанное таким путем, будет порядка 0,1 мкс. Следовательно, для оптических частот неравенство $1/\tau_0 \ll \omega_a$ выполняется, и исходное предположение о том, что осциллятор относительно медленно теряет свою энергию, обосновано.

Это медленное затухание амплитуды и энергии излучающего диполя, обусловленное реакцией излучения, удобно ввести непосредственно в уравнение движения диполя. При этом уравнение (1.4) для лоренцевых вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{x}_a + \frac{2}{\tau_0} \dot{x}_a + \omega_a^2 x_a = \frac{e}{m} E, \quad (1.11)$$

где E должно теперь рассматриваться как поле всех других зарядов и токов, действующее на диполь a . Легко проверить, что при $E = 0$ из уравнения (1.11) действительно вытекает затухание амплитуды диполя со скоростью $1/\tau_0$ и его энергии со скоростью $2/\tau_0$.

§ 3. КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА РАБИ

Одним из самых простых и в то же время весьма важным является случай, когда внешнее поле колеблется с частотой ω , близкой к собственной частоте ω_a одного из диполей. Именно такая близость возбуждающей и собственной частот приводит к резонансным явлениям. Мы несколько видоизменим обычный подход к решению этой известной проблемы, рассматривая квазирезонансные эффекты, т. е. эффекты, возникающие в непосредственной близости к резонансу.

Запишем приложенное поле в виде

$$E = \mathcal{E} [e^{i\omega t} + \text{к. с.}], \quad (1.12)$$

где $\mathcal{E}$ — постоянная амплитуда, а сокращение «к. с.» обозначает, как обычно, выражение, комплексно сопряженное предшествующему. Представим далее x_a в виде суммы двух слагаемых, одно из которых приблизительно синфазно с полем E , а другое сдвинуто по фазе относительно E приблизительно на 90° (т. е. является «квадратурным»):

$$x_a = x_0 [u_a \cos \omega t - v_a \sin \omega t]. \quad (1.13)$$

Здесь величину x_0 можно рассматривать как постоянную амплитуду колебаний вблизи какого-то момента времени. Величины u_a и v_a , вообще говоря, не постоянны, так как собственная частота ω_a для x_a отлична от частоты поля ω . Однако u_a и v_a будут изменяться во времени очень медленно, если разность $\omega - \omega_a$ мала. Фактически предполагается справедливость неравенств

$$|\dot{u}_a| \ll \omega |u_a|, \quad |\ddot{u}_a| \ll \omega^2 |u_a|, \quad |\dot{v}_a| \ll \omega |v_a|, \quad |\ddot{v}_a| \ll \omega^2 |v_a|, \quad (1.14)$$

которые гарантируют, что u_a и v_a являются огибающими (относительными амплитудами), медленно меняющимися по сравнению с $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$.

Эти предположения позволяют представить уравнение движения диполя (1.11) как пару уравнений для u_a и v_a :

$$\dot{u}_a = -\frac{1}{2\omega} (\omega_a^2 - \omega^2) v_a - \frac{u_a}{\tau_0} - \frac{1}{\omega\tau_0} \dot{v}_a, \quad (1.15)$$

$$\dot{v}_a = \frac{1}{2\omega} (\omega_a^2 - \omega^2) u_a - \frac{v_a}{\tau_0} - \frac{e}{m\omega x_0} \mathcal{E} + \frac{1}{\omega\tau_0} \dot{u}_a. \quad (1.16)$$

Поскольку $\omega_a \approx \omega$, можно положить здесь $\omega_a^2 - \omega^2 \approx 2\omega(\omega_a - \omega)$ и для удобства обозначить разность частот через Δ_a :

$$\Delta_a \equiv \omega_a - \omega, \quad (1.17)$$

Ввиду относительно малой скорости радиационного затухания (т. е. ввиду $\omega\tau_0 \gg 1$) последним слагаемым в каждом из уравнений (1.15), (1.16) можно пренебречь.

В реальных физических ситуациях радиационное затухание — обычно не единственный фактор, приводящий к затуханию амплитуды диполя. Вследствие множества случайных некогерентных взаимодействий (столкновения и т. п.), которые не были включены в исходный гамильтониан, эффективное «время жизни» осциллятора обычно короче его чисто радиационного времени жизни τ_0 . Заменим поэтому τ_0 на T ; величина T зависит от конкретных условий, причем подразумевается, что полная скорость затухания $1/T$ должна быть больше или по крайней мере равна чисто радиационной скорости $1/\tau_0$. При этих предположениях уравнения для синфазной и квадратурной амплитуд принимают соответственно вид

$$\dot{u} = -\Delta v - \frac{u}{T}, \quad (1.18a)$$

$$\dot{v} = \Delta u - \frac{v}{T} - \kappa \mathcal{E}, \quad (1.18b)$$

где

$$\kappa \equiv \frac{e}{m\omega x_0}. \quad (1.19)$$

Мы опустили индекс a , поскольку Δ в равной мере характеризует атомы с различными резонансными частотами.

Уравнения (1.18a) и (1.18b) имеют простое решение:

$$u(t; \Delta) = [u_0 \cos \Delta t - v_0 \sin \Delta t] e^{-t/T} + \kappa \mathcal{E} \int_0^t dt' \sin \Delta(t-t') e^{-(t-t')/T}, \quad (1.20a)$$

$$v(t; \Delta) = [u_0 \sin \Delta t + v_0 \cos \Delta t] e^{-t/T} - \kappa \mathcal{E} \int_0^t dt' \cos \Delta(t-t') e^{-(t-t')/T}, \quad (1.20b)$$

где $u_0 = u(0, \Delta)$ и $v_0 = v(0, \Delta)$ — начальные значения огибающих u и v . С течением времени все начальные осцилляции затухают, и при $t \gg T$ из решения (1.20a), (1.20b) получается известный результат

$$x_a(t) = \frac{e}{m} \mathcal{E} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_a^2 - \omega^2 + 2i\omega/T} + \text{к. с.} \right). \quad (1.21)$$

Следовательно, под действием внешнего поля диполь осциллирует с частотой поля, но не точно в фазе с полем.

Уравнения (1.18a) и (1.18b) являются классическими аналогами нелинейных квантовых уравнений для осцилляций атом-

ного диполя, которые будут важны в последующих главах. В дальнейшем мы именуем решение (1.20а), (1.20б) классическим решением Раби, поскольку решение квантовой задачи для рассмотренного здесь случая $\mathcal{E} = \text{const}$ принадлежит Раби [3] и получено в его ранних исследованиях по магнитному резонансу (см. гл. 3)¹⁾.

§ 4. ФОРМА И ШИРИНА ЛИНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

В реальном диэлектрике составляющие его диполи могут осциллировать с различными собственными частотами. Поэтому каждое вещество имеет множество линий излучения. Удельная поляризация среды $P(t)$ фактически обусловлена осцилляциями диполей на всех этих частотах. К счастью, для большинства веществ, линии излучения и поглощения которых лежат в оптическом диапазоне или вблизи него, последние хорошо разрешаются, что позволяет ограничиться рассмотрением диполей, которые дают вклад в одну линию.

Спектральная ширина линии излучения зависит от многих факторов, так что вопрос о форме спектральной линии очень сложен. Для наших целей достаточно элементарного рассмотрения. Уже выражения (1.20а), (1.20б) показывают, что линия излучения одиночного диполя не является бесконечно узкой. Вследствие конечности времени жизни каждого возбужденного дипольного момента эффективная ширина линии излучения по частоте приблизительно равна $1/T$. Поскольку она одинакова для всех диполей, ее обычно называют однородной шириной спектральной линии. Обозначим ее через

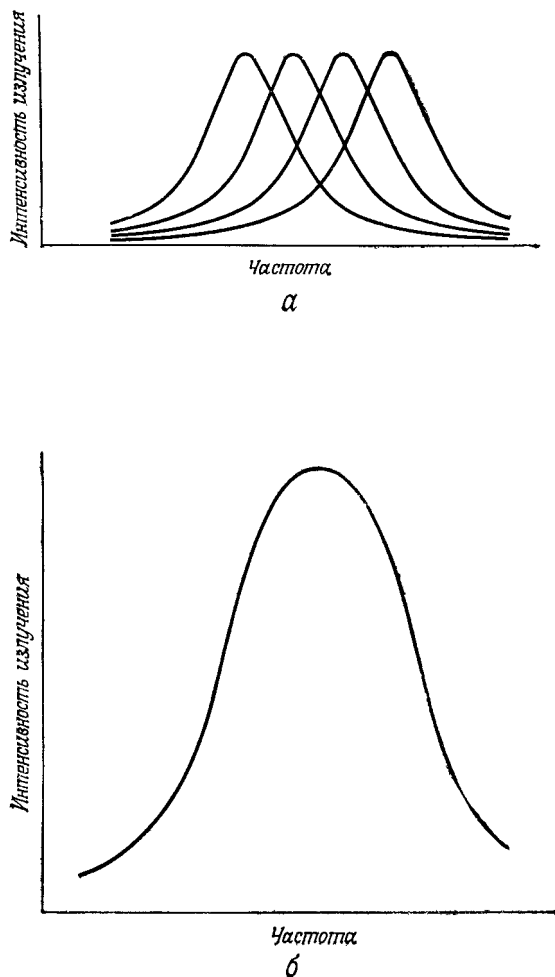
$$\delta\omega_0 \sim \frac{1}{T}. \quad (1.22)$$

Так как затухание дипольного момента экспоненциальное, форма спектральной линии является лоренцевой.

К сожалению, эта упрощенная картина не всегда пригодна. Вследствие эффекта Доплера атомы газа, движущиеся с разными скоростями, имеют разные эффективные резонансные частоты, даже если они идентичны во всех других отношениях. Та же картина наблюдается и в твердых телах: слегка различные окружения атомов, как-то случайные дислокации, примеси, механические напряжения и т. п., также приводят к разным эффективным резонансным частотам для идентичных в других отношениях атомов.

¹⁾ Систематическое изложение теории магнитного резонанса содержится, например, в книге Абрагама [8*]. — *Прим ред.*

Вследствие этого во многих случаях наблюдаемая линия излучения должна рассматриваться как суперпозиция большого



Фиг. 1.1. Возникновение неоднородного уширения.

a — отдельные лоренцевы линии излучения, которые отвечают различным атомным диполям, осциллирующим с четырьмя различными центральными частотами; *б* — результирующая линия излучения для диэлектрика, состоящего из таких атомов. Если отдельные линии плотно распределены в частотном диапазоне, большом по сравнению с их собственными индивидуальными ширинами, то результирующая линия называется неоднородно уширенной.

числа лоренцевых линий, каждая из которых имеет однородную ширину $1/T$ и центральную частоту ω_a . На фиг. 1.1 показан предельно простой случай, когда имеются только четыре различные

центральные частоты. Видно, что расстояние между наиболее удаленными центрами линий лучше передает ширину результирующей линии излучения, чем однородная ширина $1/T$. В такого рода случаях говорят, что полная линия уширена «неоднородно» значительно сильнее, чем она уширена «однородно». Термин «неоднородное уширение» относится, по сути, к уширению за счет окружающих неоднородностей, которые приводят к различию эффективных резонансных частот для идентичных в других отношениях осцилляторов.

Обычно неоднородное уширение можно удовлетворительно описать, вводя нормированную функцию неоднородного уширения $G(\omega_0)$, определенную так, что $G(\omega_0)d\omega_0$ есть относительное число диполей, центральные резонансные частоты которых лежат в пределах $d\omega_0$ около частоты ω_0 . Очевидное условие нормировки имеет вид

$$\int_0^{\infty} G(\omega'_0) d\omega'_0 = 1.$$

Мы будем чаще использовать для неоднородно уширенной линии функцию распределения *расстроек* $g(\Delta)$, полученную из $G(\omega_0)$ путем сдвига исходной частоты ω в начало координат. Таким образом, $g(\Delta)d\Delta$ есть относительное число диполей в пределах интервала расстроек $d\Delta$, резонансная центральная частота ω_0 которых отстоит от частоты внешнего поля ω на величину $\Delta = \omega_0 - \omega$. Условие нормировки будем использовать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta') d\Delta' = 1, \quad (1.23)$$

считая величину $g(\Delta')$ на фактическом нижнем пределе интегрирования $\Delta' = -\omega$ (он отвечает $\omega'_0 = 0$) настолько малой, что замена этого предела на $-\infty$ не приводит к существенной ошибке. Заметим, что, вообще говоря, максимум функции неоднородного уширения $G(\omega_0)$ *необязательно* совпадает с частотой приложенного поля ω , так что $g(\Delta)$ *необязательно* имеет максимум при нулевой расстройке. Однако для практически интересных квазирезонансных задач $g(0) \approx g_{\text{макс}}$ и $g(\Delta') \approx g(-\Delta')$.

§ 5. ЗАТУХАНИЕ СВОБОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Физический смысл неоднородного уширения тесно связан с неоднородным «временем жизни». Рассмотрим ансамбль диполей, распределенных с постоянной плотностью $\mathcal{N}$ в малой области.

Удельную поляризацию, связанную с этими диполями, можно записать так:

$$P(t) = \mathcal{N}ex_0 \int \operatorname{Re} \{u(t; \Delta') + iv(t; \Delta')\} e^{i\omega t} g(\Delta') d\Delta'. \quad (1.24)$$

Эта формула получена из выражения (1.13) с учетом формы линии $g(\Delta')$ и атомной плотности $\mathcal{N}$. Излучение, обусловленное поляризацией $P(t)$, в качественном отношении будет одинаковым для любой плавной функции расстройки $g(\Delta')$. Для простоты мы выберем $g(\Delta')$ в виде лоренцевой кривой с максимумом при $\Delta' = \Delta$, что соответствует максимуму функции формы линии $G(\omega'_0)$ при $\omega + \Delta$:

$$g(\Delta') = \frac{\delta\omega_n}{\pi} \frac{1}{(\Delta' - \Delta)^2 + (\delta\omega_n)^2}. \quad (1.25)$$

Здесь $\delta\omega_n$ — неоднородная полуширина (т. е. ширина на высоте, равной половине максимальной). Функции $u(t; \Delta')$ и $v(t; \Delta')$ возьмем из решения (1.20а), (1.20б), ограничившись собственными колебаниями ($\mathcal{E} = 0$), при упрощающем предположении, что u_0 и v_0 не зависят от Δ' . Тогда интеграл по Δ' в (1.24) легко вычисляется. Результирующая удельная поляризация

$$P(t) = \mathcal{N}ex_0 \operatorname{Re} \{ [u_0 + iv_0] e^{i(\omega + \Delta)t} \} e^{-t/T} e^{-\delta\omega_n t} \quad (1.26)$$

имеет ряд характерных особенностей. Во-первых, $P(t)$ осциллирует с частотой $\omega + \Delta$, при которой частотная функция распределения имеет максимум. Во-вторых, осцилляции затухают вследствие «однородного времени жизни» T . Однако наиболее существенным новым моментом является наличие множителя $\exp[-\delta\omega_n t]$, который показывает, что полная скорость затухания увеличивается вследствие неоднородного уширения. Поскольку учет последнего не означает введения новых механизмов потерь, появление в решении нового фактора затухания требует объяснения.

Объяснение достаточно простое. Фактор затухания $\exp[-\delta\omega_n t]$ обусловлен интерференцией всех диполей с частотами, распределенными в пределах неоднородной линии. Поэтому затухание из-за неоднородного уширения можно истолковать как процесс расфазировки, который подавляет только макроскопическую удельную поляризацию $P(t)$, в то время как каждый отдельный диполь продолжает осциллировать в течение времени T . Однако $P(t)$ практически исчезает гораздо быстрее, а именно как только диполи полностью расфазировываются друг относительно друга.

Поскольку поле, излучаемое ансамблем диполей, определяется величиной $P(t)$, а не непосредственно характеристиками отдельных диполей, ансамбль может практически прекратить из-

лучение задолго до того, как они перестанут осциллировать, если $\delta\omega_n \gg 1/T$. Такое явление давно наблюдалось Ханом при изучении ядерного магнитного резонанса [4]¹⁾. Его название — затухание свободной индукции²⁾ — показывает, что свободные колебания диполей выглядят затухающими, а их поле излучения существует только на протяжении некоторой доли естественного времени жизни T . В гл. 3 обсуждаются недавние эксперименты Бруэ и Шумейкера [5] по наблюдению затухания квантовооптической свободной поляризации.

Из выражения (1.26) для $P(t)$ ясно, что $\delta\omega_n$ действительно выступает в роли обратного времени жизни. Для дальнейшего полезно определить «неоднородное время жизни» T^* , зависящее от максимального значения функции расстрой:

$$T^* = \pi g (\Delta')_{\text{макс}}. \quad (1.27)$$

Это определение, как ясно из (1.25), в точности отвечает соотношению $\delta\omega_n = 1/T^*$ только тогда, когда неоднородно уширенная линия имеет лоренцеву форму. Иногда удобно также использовать полную эффективную ширину линии: $\delta\omega_{\text{полн}} = \delta\omega_0 + \frac{1}{2}\delta\omega_n$. Как следует из (1.26), выражение

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T^*} = \frac{1}{\mathcal{T}} \quad (1.28)$$

пригодно для грубого определения «полной» скорости релаксации $\mathcal{T}^{-1}$.

§ 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Оптическая длина волны столь мала, что практически почти во всех оптических экспериментах мы имеем дело с распространением излучения через протяженную среду. Поэтому наше обсуждение необходимо обобщить, чтобы учесть зависимость величин E и P не только от времени, но и от пространственных координат. В связи с этим обратимся теперь к бегущим электромагнитным волнам. Предположим, что в диэлектрической среде, состоящей из осцилляторов типа рассмотренных в предыдущих параграфах, распространяется импульс электромагнитного излучения. Для простоты ограничимся плоскими волнами, которые распространяются в направлении положительной оси z вдали от входной поверхности диэлектрика. Эти условия нетрудно реализовать на практике.

¹⁾ Подробнее см., например, в [8*]. — *Прим. ред.*

²⁾ Употребляется также термин «затухание свободной прецессии» (имеется в виду прецессия вектора намагниченности). В оптическом случае более уместным представляется термин «затухание свободной поляризации». — *Прим. ред.*

Предметом обсуждения будут вопросы того же типа, что и в § 2. Необходимо знать, как влияют диполи на электромагнитное поле при его распространении и как поле возбуждает диполи. Задача остается, таким образом, самосогласованной. Однако речь теперь идет о непрерывном диэлектрике, а не об одноканальном осцилляторе, причем размеры диэлектрика не ограничены. Здесь уже нельзя пренебрегать членом $\partial W_{em}/\partial t$ в формуле (1.6), выражающей закон сохранения энергии.

Однако при описании излучения предпочтительнее использовать не уравнение переноса типа (1.6), а волновое уравнение Максвелла, рассматриваемое как часть самосогласованного анализа. Для наших целей достаточно записать его в одномерном виде

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E(t, z) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(t, z), \quad (1.29)$$

где удельная поляризация задана выражением (1.24) при надлежащем обобщении с учетом зависимости от z :

$$P(t, z) = \mathcal{N} \epsilon_0 \int d\Delta' g(\Delta') \operatorname{Re} \{ [u(t, z; \Delta') + iv(t, z; \Delta')] e^{i(\omega t - Kz)} \}. \quad (1.30)$$

Поле $E(t, z)$ также обобщается по сравнению с (1.12):

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) [e^{i(\omega t - Kz)} + \text{к. с.}]. \quad (1.31)$$

При совместном решении уравнений для поля и диполей нужно определить волновой вектор K , а также огибающие функции (медленно меняющиеся амплитуды) $\mathcal{E}(t, z)$, $u(t, z; \Delta)$ и $v(t, z; \Delta)$.

Выражения (1.30) и (1.31) для P и E вместе с волновым уравнением Максвелла (1.29) приводят к «синфазному» и «квадратурному» уравнениям для $\mathcal{E}$, u и v , если приравнять отдельно коэффициенты при $\cos(\omega t - Kz)$ и $\sin(\omega t - Kz)$:

$$[K^2 - k^2] \mathcal{E} = 2\pi k^2 \mathcal{N} \epsilon_0 \int u g(\Delta') d\Delta', \quad (1.32a)$$

$$2 \left[K \frac{\partial}{\partial z} + k \frac{\partial}{\partial ct} \right] \mathcal{E} = 2\pi k^2 \mathcal{N} \epsilon_0 \int v g(\Delta') d\Delta', \quad (1.32b)$$

где $k \equiv \omega/c$ — волновой вектор в вакууме¹⁾. При получении (1.32) мы существенно использовали квазирезонансное приближение и предположение о плавной зависимости всех амплитуд

¹⁾ Если речь идет об атомах в матрице, то влияние последней можно учесть, полагая $k = (\omega/c)n$, где n — показатель преломления матрицы — Прим. ред.

от обоих аргументов z и t . Это предположение подобно ранее использованному для u и v [см. (1.14)]:

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| \ll K |\mathcal{E}|, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathcal{E}|, \\ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll K |u|, \dots \quad (1.33)$$

В уравнениях (1.32) мы удержали только наибольшие по величине слагаемые¹⁾.

Вместе с дипольными уравнениями (1.18), которые остаются без изменений, уравнения (1.32) составят основу обсуждения в оставшейся части этой главы. В следующих параграфах мы применим все четыре уравнения, чтобы проанализировать классические характеристики оптического импульса с точки зрения «площади импульса», использование которой особенно плодотворно при квантовомеханическом рассмотрении в гл. 4.

В оставшейся части этого параграфа мы покажем, что используемые нами дипольные и полевые уравнения, записанные через медленно меняющиеся амплитуды, приводят к обычным классическим результатам. С этой целью мы найдем решение уравнений (1.18) и (1.32) по истечении времени, большого по сравнению с T , и убедимся, что оно ведет к обычному выражению для диэлектрической проницаемости и соответствующим дисперсионным соотношениям.

При $t \gg T$ все переходные процессы в диполях прекращаются и величины u , v и $\mathcal{E}$ перестают зависеть от времени. Величины u и v определяются формулами (1.20) при $t \rightarrow \infty$. С учетом этого уравнение (1.32а) немедленно дает

$$K^2 - k^2 = k^2 \frac{\omega_p^2}{2\omega} \int \frac{\Delta' g(\Delta') d\Delta'}{\Delta'^2 + T^{-2}}, \quad (1.34a)$$

где $\omega_p = [4\pi N e^2 / m]^{1/2}$ — так называемая плазменная частота диэлектрика. Уравнение же (1.32б) эквивалентно здесь простому соотношению

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \alpha_k \mathcal{E}, \quad (1.34б)$$

¹⁾ Приближенные уравнения для медленно меняющихся амплитуд, которые получаются из точных волновых уравнений путем отбрасывания в них малых слагаемых, содержащих вторые производные от амплитуд, называют обычно укороченными. Физические причины плавного изменения амплитуд могут быть различными (нелинейность, диссипация и др.). Плодотворность использования таких уравнений была впервые последовательно продемонстрирована (1961 г.) на примере теории ударных радио- и магнитогидродинамических волн и нелинейной акустики Хохловым [9*], а также Солуяном и Хохловым [10*, 11*]. Укороченные уравнения широко используются в современной нелинейной оптике [12*, 13*]. — *Прим. ред.*

показывающему, что по мере распространения в диэлектрике $\mathcal{E}$ затухает экспоненциально. Этот хорошо известный результат часто называют законом Бера¹⁾.

Ясно, что классический коэффициент поглощения α_k в законе Бера определяется и однородным и неоднородным уширением

$$\alpha_k = \frac{\omega_p^2}{2cT} \int \frac{g(\Delta')}{\Delta'^2 + T^{-2}} d\Delta', \quad (1.35a)$$

и имеет при резонансе две простые предельные формы. Если преобладает однородное уширение ($T \ll T^*$), то $g(\Delta') \approx \delta(\Delta' - \Delta)$ и

$$\alpha_k = \frac{\omega_p^2}{2c} \frac{1}{T} \frac{1}{\Delta^2 + T^{-2}}. \quad (1.35b)$$

Если же доминирует неоднородное уширение ($T^* \ll T$), то

$$\alpha_k = \frac{\omega_p^2}{2c} \pi g(0) \approx \frac{\omega_p^2}{2c} T^*. \quad (1.35b)$$

Из соотношения (1.34б) с учетом условия $|\partial \mathcal{E} / \partial z| \ll K \mathcal{E}$ [см. (1.33)] вытекает, что $K \gg \alpha_k$. Кроме того, симметрия подынтегральных выражений в (1.34а) и (1.35а), основанная на приближенной симметрии $g(\Delta') \approx g(-\Delta')$ вблизи резонанса, приводит к тому, что $\alpha_k \gg K - k$, и потому $K \gg K - k$. Именно поэтому в выражениях (1.35) для α_k мы положили $K = k$. Таким образом, главное воздействие диэлектрика на поле заключается в постепенном ослаблении поля по мере распространения. Гораздо более слабым эффектом является сдвиг его длины волны от $2\pi/k$ до $2\pi/K$.

Обычно принята другая форма представления результатов для α_k и $K^2 - k^2$. Чтобы прийти к ней, заметим, что поле (1.31) можно выразить через комплексный волновой вектор $\tilde{K} = K - i\alpha_k/2$ и произвольную постоянную амплитуду $\mathcal{E}_0$:

$$E(t \gg T, z) = \mathcal{E}_0 [e^{i(\omega t - \tilde{K}z)} + \text{к. с.}]. \quad (1.36)$$

Вводя комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega) \equiv \equiv (\tilde{K}c/\omega)^2$, получаем

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(\omega) = \tilde{K}^2 \approx K^2 - iK\alpha_k$$

в пренебрежении членом $-\alpha_k^2$, который лишь слегка изменяет вещественную часть. Отсюда непосредственно следует, что комп-

¹⁾ Употребляются также термины «закон Бугера» [14*] и «закон Бугера — Ламберта — Бера». — *Прим. ред.*

лексную диэлектрическую проницаемость можно представить в виде

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega} \int \frac{g(\Delta') d\Delta'}{\Delta' + i/T}. \quad (1.37a)$$

Для обычно рассматриваемого предела, когда чисто однородно уширенная линия центрирована на атомной частоте ω_a и $g(\Delta') = \delta(\Delta' - \omega + \omega_a)$, формула (1.37a) сводится к привычному дисперсионному соотношению

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_a^2 - \omega^2 + 2i\omega/T}, \quad (1.37b)$$

хорошо известному из классической теории дисперсии [ср. (1.21)].

§ 7. КЛАССИЧЕСКАЯ «ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ»

Имея в виду квантовые проблемы последующих глав, целесообразно вновь обратиться к формализму § 3 и ввести понятие «площади» для огибающей импульса. Определим классическую безразмерную «площадь» $A(t, z)$ интегралом

$$A(t, z) \equiv \kappa \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{E}(t', z) \quad (1.38)$$

по времени от огибающей электрического поля, а $\kappa \equiv e/m\omega x_0$, как и прежде.

Иллюстрацией к нашему классическому анализу импульса служит фиг. 1.2, где показана зависимость амплитуды импульса от времени в точке z внутри диэлектрика. Термин «импульс» означает, что электрическое возмущение ограничено по длительности. Поглощение импульса будет проанализировано вблизи момента $\bar{t}$ — некоторого момента после того, как импульс прошел через точку наблюдения z . Обозначим через t_0 момент времени, когда поле импульса $\mathcal{E}$ в точке z упало до нуля.

Если проинтегрировать уравнение (1.32б) по времени от некоторого момента до прихода импульса, когда $\mathcal{E} = 0$, до момента $\bar{t}$, когда опять $\mathcal{E} = 0$, то получится следующее уравнение для $A(\bar{t}, z)$:

$$2K \frac{\partial A}{\partial z} A(\bar{t}, z) = 2\pi k^2 \frac{\mathcal{N}e^2}{m\omega} \int_{-\infty}^{\bar{t}} \int v(t, z; \Delta') g(\Delta') d\Delta' dt. \quad (1.39)$$

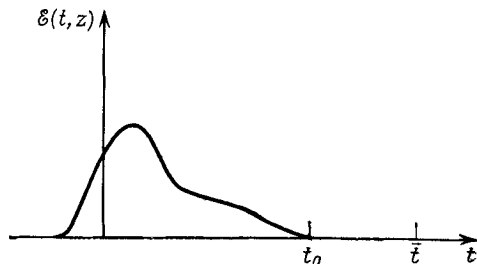
Поскольку, согласно (1.18),

$$v(t, z; \Delta) = \frac{-1}{\Delta^2 + T^{-2}} \left[\Delta \dot{u} + \frac{1}{T} \dot{v} + \frac{1}{T} \dot{A} \right], \quad (1.40)$$

интеграл по времени в (1.39) тривиален. Результат таков:

$$2K \frac{\partial A}{\partial z} = -2\pi k^2 \frac{\mathcal{N}e^2}{m\omega} \int d\Delta' \frac{g(\Delta')}{\Delta'^2 + T^{-2}} \left[\Delta' u + \frac{1}{T} v + \frac{1}{T} A \right]. \quad (1.41)$$

Все переменные взяты теперь в момент $\bar{t}$. Но импульс уже прошел через точку z в более ранний момент t_0 , так что в интервале от t_0 до $\bar{t}$ диполи совершают свободные осцилляции. Следовательно, если мы положим $\mathcal{E}$ равным нулю и заменим t на $\bar{t} - t_0$,



Фиг. 1.2. Огибающая электрического поля как функция времени при фиксированном z .

Момент t_0 есть конец импульса: при t_0 и для всех более поздних моментов времени огибающая равна нулю

то функции u и v , фигурирующие в (1.41), определяются формулами (1.20). Под u_0 и v_0 здесь следует понимать $u(t_0, z; \Delta')$ и $v(t_0, z; \Delta')$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Delta' u + \frac{1}{T} v = & u_0 \left[\Delta' \cos \Delta(\bar{t} - t_0) + \frac{1}{T} \sin \Delta'(\bar{t} - t_0) \right] e^{-(\bar{t} - t_0)/T} + \\ & + v_0 \left[\frac{1}{T} \cos \Delta(\bar{t} - t_0) - \Delta' \sin \Delta'(\bar{t} - t_0) \right] e^{-(\bar{t} - t_0)/T}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Чтобы использовать (1.42) при анализе (1.41), выделим два случая, которые для удобства назовем «классическим» и «современным». Они различаются соотношением трех времен: T , $\bar{t} - t_0$ и неоднородного времени жизни T^* . Первые два входят непосредственно, а T^* входит через $g(\Delta')$ [см. 1.27)]. В этих двух случаях анализ уравнения (1.41) облегчается использованием соотношения (1.42). Они определяются следующим образом:

$$\text{„классический“ случай: } \bar{t} - t_0 \gg T^* \gg T; \quad (1.43)$$

$$\text{„современный“ случай: } T \gg \bar{t} - t_0 \gg T^*. \quad (1.44)$$

«Классический» случай, справедливый для времен, столь больших, что переходный отклик каждого диполя затухает до нуля, обсуждался в предыдущем параграфе, хотя и в другом аспекте. Легко показать, что подход, связанный с «площадью» импульса, дает те же результаты. Поэтому мы сосредоточим

внимание на «современном» случае. Рассмотрим столь короткие времена свободных осцилляций $\bar{t} - t_0$, что отклик ни одного из диполей еще не исчезнет (т. е. $\bar{t} - t_0 \ll T$). Однако вследствие расфазировки диполей, возникающей за счет неоднородного уширения, макроскопическая поляризация полностью затухнет, если $\bar{t} - t_0 \gg T^*$.

Выражение (1.41), которое описывает изменение площади импульса с расстоянием, упрощается, если учесть, что два последних слагаемых при $\bar{t} - t_0 \ll T$ взаимно уничтожаются. Это можно проверить, интегрируя уравнение (1.18б) для $v(t, z; 0)$ в пределах короткого времени и используя представление

$$\frac{1}{T} \frac{v(\bar{t}, z; \Delta)}{\Delta'^2 + T^{-2}} = \pi \delta(\Delta') v(\bar{t}, z; 0), \quad (1.45)$$

справедливое, если функция $T^{-1}[\Delta'^2 + T^{-2}]^{-1}$ имеет при интегрировании по Δ' наиболее острый максимум. Последнее действительно имеет место с учетом неравенств (1.44).

Вычисление оставшегося члена в правой части (1.41) требует определенной аккуратности. Выписанный полностью с использованием $\Delta' u$ из (1.42), этот член имеет вид

$$\int d\Delta' \frac{\Delta'^2 g(\Delta')}{\Delta'^2 + T^{-2}} \left[u_0 \frac{\cos \Delta'(\bar{t} - t_0)}{\Delta'} - v_0 \frac{\sin \Delta'(\bar{t} - t_0)}{\Delta'} \right] e^{-(\bar{t} - t_0)/T}. \quad (1.46)$$

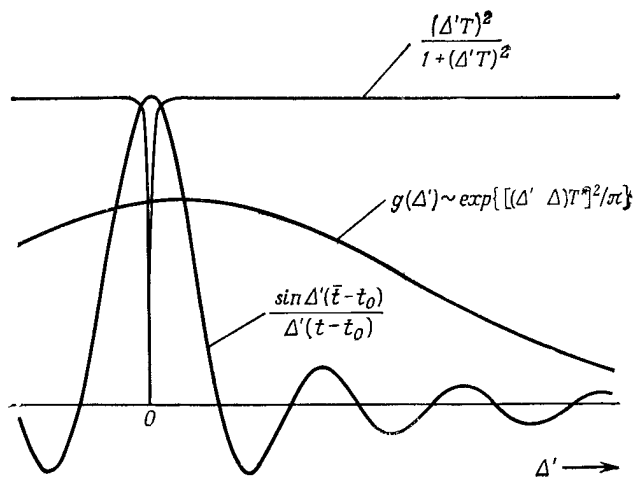
В пределе $\bar{t} - t_0 \gg T^*$ тригонометрические функции достаточно быстро осциллируют, так что отличный от нуля вклад в интеграл может вносить лишь область вблизи $\Delta' = 0$. Второе слагаемое в (1.46) имеет хорошо известное формальное представление

$$\frac{\sin \Delta'(\bar{t} - t_0)}{\Delta'} \rightarrow \pi \delta(\Delta').$$

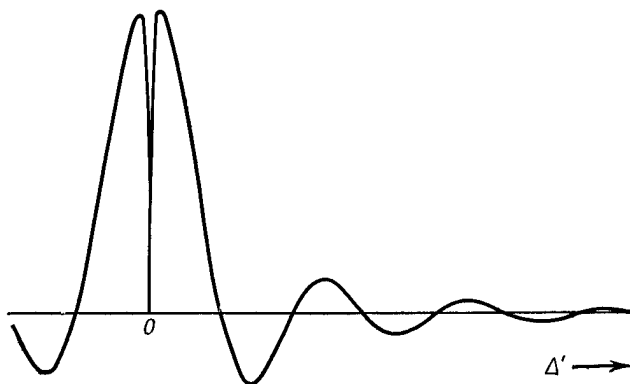
На первый взгляд может показаться, что указанное слагаемое вообще не дает вклада, так как $\Delta'^2 \delta(\Delta') \equiv 0$. Однако поскольку $T \gg \bar{t} - t_0$, функция $\Delta'^2[\Delta'^2 + T^{-2}]^{-1}$ близка к нулю лишь в очень малой окрестности точки $\Delta' = 0$, и связанными с этим эффектами можно пренебречь. Итак,

$$\begin{aligned} - \int v_0 g(\Delta') \frac{\Delta'^2}{\Delta'^2 + T^{-2}} \frac{\sin \Delta'(\bar{t} - t_0)}{\Delta'} e^{-(\bar{t} - t_0)/T} d\Delta' = \\ = - \pi g(0) v(t_0, z; 0), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где множитель $\exp[-(\bar{t} - t_0)/T] \approx 1$ и заменен справа единицей. Данный результат, несколько неожиданный с формальной точки зрения, становится очевидным при тщательном учете всех временных неравенств (фиг. 1.3). Вклад первого слагаемого в (1.46) определить проще, и он оказывается равным нулю. Точнее говоря, первый член связан с главной частью интеграла от



a



б

Фиг. 13. Поведение подынтегрального выражения в интеграле (147).

a — три существенные функции от Δ' , *б* — их произведение для гауссової линии $g(\Delta')$ смещенной относительно $\Delta' = 0$. Из соотношения спектральных ширин этих трех функций ясно, что представлен «современный» случай $T > (t - t_0) > T^*$. Результирующая кривая *б* показывает, что вследствие узости «провала» вблизи $\Delta' = 0$ он практически не влияет на величину площади под кривой. Поэтому интеграл от произведения пропорционален $g(0)$, хотя при $\Delta' = 0$ подынтегральное выражение равно нулю.

$g(\Delta')/\Delta'$, и потому он, грубо говоря, в T^*/T раз меньше, чем второе слагаемое [т. е. (1.47)], и им можно пренебречь.

Используя еще раз уравнение (1.186) для времен, коротких по сравнению с T , получаем следующий результат:

$$v(t_0, z; 0) = -A(t_0, z), \quad (1.48)$$

который связывает площадь импульса с резонансной диссипативной частью амплитуды диполя. Поскольку $A(\bar{t}, z) \equiv A(t_0, z)$ [ведь $\mathcal{E}(t, z) = 0$ для $t > t_0$], можно записать (1.41) в виде

$$2K \frac{\partial}{\partial z} A(\bar{t}, z) = -k^2 \frac{\omega_p^2}{2\omega} \pi g(0) A(\bar{t}, z). \quad (1.49)$$

Соотношение (1.49) выражает классическую «теорему площадей».

Из «теоремы площадей» вытекают два важных следствия. Во-первых, видно экспоненциальное затухание A с расстоянием z по закону Бера

$$A(\bar{t}, z) = A(\bar{t}, z_0) e^{-1/2 \alpha_k (z - z_0)}. \quad (1.50)$$

Это согласуется с (1.346) и (1.36) в том же пределе $T \gg T^*$, как и ранее. Новым моментом является, однако, то, что результат не зависит от временной формы импульса конечной длительности, в то время как ранее предполагалось, что $\mathcal{E}$ не меняется во времени. Во-вторых, поле теряет энергию в процессе распространения даже при отсутствии взаимодействия с диссипативной системой. Действительно, из (1.49) ясно, что, даже если скорость релаксации каждого диполя равна нулю ($T = \infty$), диэлектрик тем не менее ослабляет поле, проходящее через него. Физическая причина этого уже отмечалась: диполи возбуждаются прошедшим импульсом за счет его энергии и затем осциллируют с частотой поля. Однако, после того как импульс прошел, восстанавливаются собственные колебания. В итоге в течение времени T^* диполи полностью расфазированы друг относительно друга и могут создавать лишь весьма малую макроскопическую удельную поляризацию. Диполи могут обмениваться друг с другом накопленной энергией, но возвращение энергии от системы диполей к полю уже невозможно.

Существование большого разрыва между T и T^* , который, например, в разреженных парах щелочных металлов составляет около 100 нс, стимулировало постановку в последнее десятилетие множества остроумных квантовооптических экспериментов по использованию энергии, накопленной как описано выше. Первым примером этого рода служит фотонное эхо. Наблюдались и другие эффекты: оптическая нутация, затухание свободной по-

ляризации, самоиндуцированная прозрачность, оптическая адиабатическая инверсия и др. Все эти эффекты обсуждаются в последующих главах.

§ 8. АНОМАЛЬНОЕ КЛАССИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

Чтобы полностью оценить важность открытий, сделанных в последнее время в квантовой оптике, целесообразно указать на их неожиданно широкую применимость в классической области. В предыдущем параграфе мы выяснили условия, при которых «площадь» электрического поля уменьшается экспоненциально. Было бы неправильно полагать, что и энергия распространяющегося поля также затухает экспоненциально. Этот вопрос был изучен в работах [6, 7]. Дело в том, что изменение фазы электрического поля на π приводит к изменению знака огибающей $\mathcal{E}$. В результате интеграл от $\mathcal{E}$, т. е. площадь импульса, может оказаться равным нулю или очень малым, а энергия импульса, пропорциональная $\mathcal{E}^2$, — значительной.

Рассмотрение такого «аномального поглощения» для классических диэлектриков производится без особого труда. Используя ранее обозначения мы слегка обобщим, чтобы учесть изменения фазы для огибающей. С этой целью здесь будем рассматривать огибающую как комплексную функцию

$$\mathcal{E}(t, z) = |\mathcal{E}(t, z)| e^{i\varphi(t, z)}. \quad (1.51)$$

Считая модуль и фазу гладкими функциями в пространстве и во времени, запишем электрическое поле в виде

$$E(t, z) = 2 \operatorname{Re} [\mathcal{E}(t, z) e^{i(\omega t - kz)}], \quad (1.52)$$

который является простым обобщением выражения (1.31). Отметим, что в экспоненте фигурирует волновой вектор $k = \omega/c$ в вакууме, а не K . Истинное мгновенное значение волнового вектора здесь равно $k - \partial\varphi/\partial z$.

Уравнения, описывающие диполи, а также волновое уравнение Максвелла удобно представить в комплексной форме, используя комплексную амплитуду диполя

$$r = u + iv, \quad (1.53)$$

вместо u и v по отдельности. При этом уравнения движения (1.18а) и (1.18б) для дипольного момента объединяются в одно

$$\frac{\partial}{\partial t} r(t, z; \Delta) = \left(i\Delta - \frac{1}{T} \right) r(t, z; \Delta) - i\kappa \mathcal{E}(t, z), \quad (1.54)$$

и то же самое относится к укороченным уравнениям Максвелла (1.32а) и (1.32б):

$$-2ik \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial ct} \right] \mathcal{E}(t, z) = -2\pi k^2 N e x_0 \times \\ \times \int d\Delta' g(\Delta') r(t, z; \Delta'). \quad (1.55)$$

Слагаемые, содержащие производные высших порядков от медленно меняющихся величин, опущены [см. неравенства (1.33)]

Простейший способ отыскания самосогласованного решения связанных уравнений для $r(t, z; \Delta)$ и $\mathcal{E}(t, z)$ состоит в предположении об одинаковой временной зависимости величин r и $\mathcal{E}$:

$$r(t, z; \Delta) = r(v, z; \Delta) e^{i v t}, \quad (1.56a)$$

$$\mathcal{E}(t, z) = e(v, z) e^{i v t} \quad (1.56b)$$

и подстановке этих выражений в уравнения (1.54) и (1.55). Исключая затем r , получаем дифференциальное уравнение первого порядка для $e(v, z)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - i \frac{v}{c} + \mathcal{A}(v) \right] e(v, z) = 0. \quad (1.57)$$

Здесь

$$\mathcal{A}(v) = i \frac{\omega_p^2}{4} \int d\Delta' \frac{g(\Delta')}{\Delta' - v + i/T}. \quad (1.58)$$

Если для простоты считать, что функция $g(\Delta')$ имеет лоренцеву форму с полушириной $1/T^*$ и центрирована при расстройке $\Delta' = \Delta$, то выражение (1.58) упрощается:

$$\mathcal{A}(v) = \frac{\omega_p^2}{4} \frac{1}{1/\mathcal{T} - i(\Delta - v)}. \quad (1.59)$$

Как и в (1.28), через $1/\mathcal{T} = 1/T + 1/T^*$ обозначена полная скорость затухания поляризации, близкая к полной эффективной ширине линии.

Решение для огибающей поля имеет простой экспоненциальный вид

$$e(v, z) = e(v, 0) e^{-i[v/c - i\mathcal{A}(v)]z}. \quad (1.60)$$

Важнее, однако, то, что линейность уравнений (1.54) и (1.55) позволяет сконструировать общее решение для $\mathcal{E}(t, z)$ путем суммирования решений вида (1.60) с разными частотами v . Другими словами, если рассматривает $e(v, 0)$ как фурье-компоненту поля при $z = 0$,

$$e(v, 0) = \frac{1}{2\pi} \int dt' \mathcal{E}(t', 0) e^{-i v t'}, \quad (1.61)$$

то для поля получается следующее выражение:

$$\mathcal{E}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int dv \int dt' \mathcal{E}(t', 0) e^{iv(t-t')} e^{-i(v-\mathcal{A})z/c}, \quad (1.62)$$

которое совпадает, по существу, с выражением, найденным впервые Криспом [6] при изучении импульсов с очень малой площадью, распространяющихся в квантовых поглотителях.

Характер поглощения импульса, описываемого фурье-преобразованием (1.62), зависит от соотношения между его длительностью τ и временем $\mathcal{T}$. Поскольку $1/\tau$ служит мерой спектральной ширины импульса, максимальные частоты, которые еще дают вклад в фурье-преобразование, будут порядка $1/\tau$. Следовательно, в «классическом» случае, когда $\tau \gg \mathcal{T}$, для всех существенных частот выполняется соотношение $v\mathcal{T} \ll 1$. При этом в хорошем приближении можно пренебречь зависимостью величины $\mathcal{A}$ от v и положить $\mathcal{A}(v) \approx \mathcal{A}_0$, где

$$\mathcal{A}_0 \equiv i \frac{\omega_p^2}{4c} \frac{1}{\Delta + i/\mathcal{T}} \quad (1.63)$$

и не зависит от v . Результирующая огибающая

$$\mathcal{E}(t, z) = \mathcal{E}\left(t - \frac{z}{c}, 0\right) e^{-\mathcal{A}_0 z} \quad (1.64)$$

распространяется со скоростью света в вакууме, не меняя первоначальной формы, но затухая по закону Бера соответственно фактору $\exp[-\mathcal{A}_0 z]$.

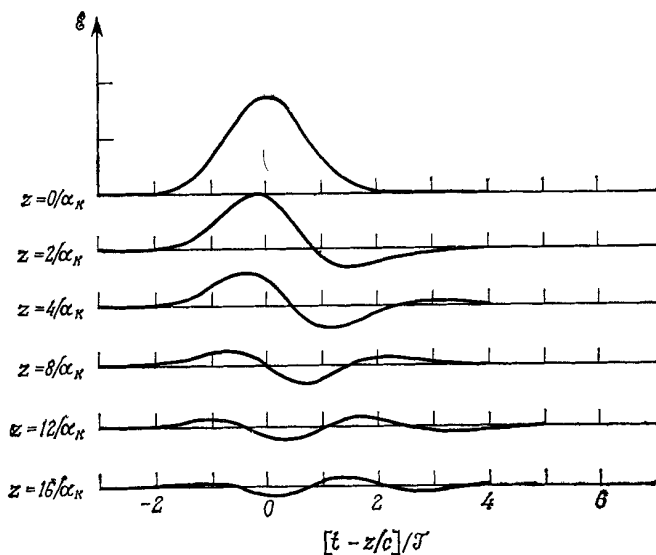
В чисто монохроматическом пределе неограниченно длинного импульса, когда $e(v, 0) = \mathcal{E}_0 \delta(v - \omega)$, выражение (1.64), как нетрудно показать, полностью эквивалентно (1.36). Соответствующая огибающей (1.64) комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega} \frac{1}{\Delta + i/\mathcal{T}} \quad (1.65)$$

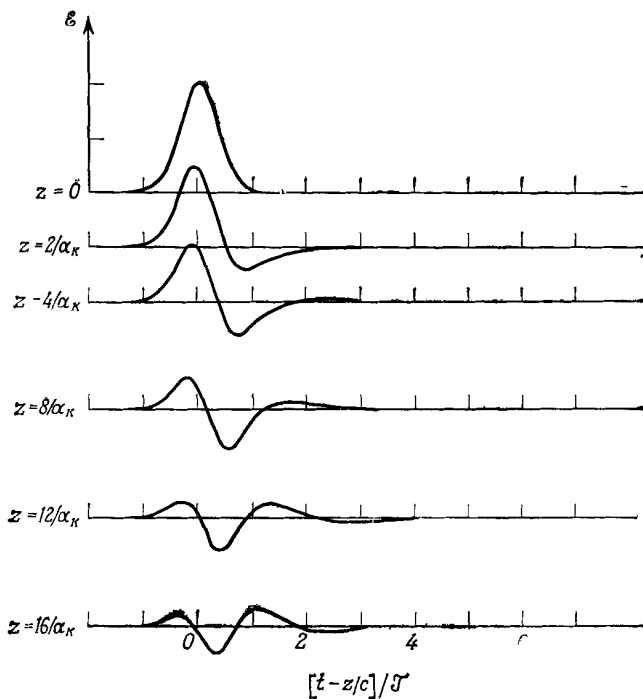
идентична (1.37a) при той же лоренцевой функции расстройки $g(\Delta')$. Очевидно, что для «классического» предела длинного импульса в его поведении нет никаких аномалий.

Хорошо выраженные аномалии возникают, однако, для импульсов, которые удовлетворяют «сверхсовременному» пределу $\tau \leq \mathcal{T}$, т. е. для импульсов короче обоих времен релаксации T и T^* . На фиг. 1.4 и 1.5 показаны заимствованные у Криспа [6] результаты численного интегрирования (1.62) в случае гауссовых входных импульсов

$$\mathcal{E}(t, 0) = \mathcal{E}_0 e^{-4t^2/\tau^2}$$

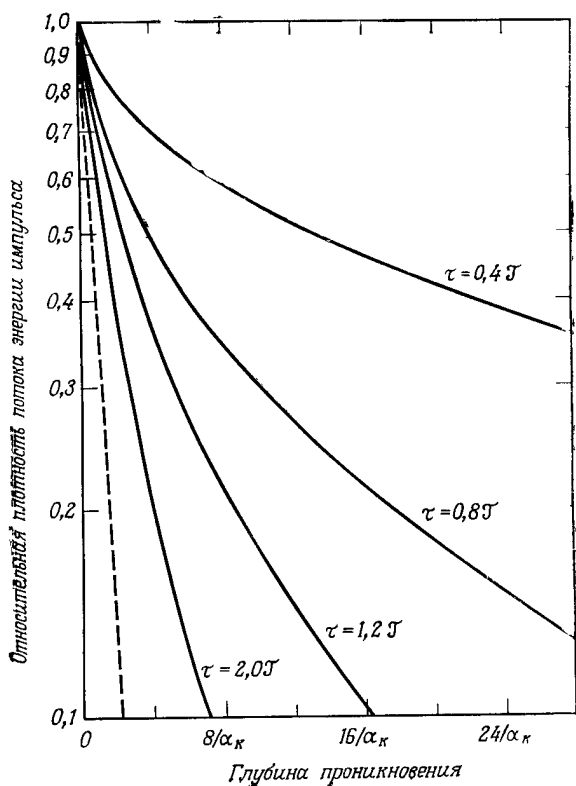


Фиг. 1.4. Распространение гауссова импульса с длительностью $\tau = 2\mathcal{T}$ [6].
Глубина проникновения z измерена в длинах поглощения α_K^{-1} , отвечающих закону Бера



Фиг. 1.5. Распространение гауссова импульса с длительностью $\tau = \mathcal{T}$ [6].
Глубина проникновения z измерена в длинах поглощения α_K^{-1} , отвечающих закону Бера.

с различными длительностями импульса τ . Видно, что быстро развивающиеся отрицательные части огибающей $\mathcal{E}(t, z)$ сводят площадь импульса до нуля. Однако, как ясно из фиг. 1.6, соответствующее поглощение энергии происходит гораздо медленнее.



Фиг. 1.6. Зависимость плотности потока энергии от глубины проникновения в поглотитель для гауссовых импульсов с различными длительностями τ [6].

Наиболее простой способ объяснения этих аномалий заключается в следующем. Отклонения в поглощении энергии от закона Бера имеют место только для импульсов короче T . Спектральные ширины таких импульсов превосходят полную ширину $1/T$ линии поглощения диэлектрика. Следовательно, большая часть энергии импульса сосредоточена в тех областях спектра, где нет поглощения. Именно за счет этих спектральных крыльев импульс может распространяться на большие расстояния. В этом

нет, конечно, никакого противоречия с законом Бера. Просто закон Бера с коэффициентом поглощения

$$\alpha_k = \frac{\omega_p^2 \mathcal{T}}{2c}$$

неприменим, если ширина линии поглощения $1/\mathcal{T}$ уже спектральной ширины импульса. В квантовой области ситуация существенно иная. Здесь значительные отклонения от закона Бера имеют место даже для длинных импульсов, спектры которых лежат полностью внутри линии поглощения диэлектрика. Квантовое рассмотрение закона Бера и распространения импульса будет дано в гл. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Lorentz H. A., The Theory of Electrons, New York 1952, Ch. 4 (См. перевод Г. А. Лоренца Теория электронов, Гостехиздат 1956)
- 2 Born M., Wolf E., Principles of Optics, Elmsford N. Y., 1970, 4th ed. (См. перевод М. Борна, Э. Вольфа, Основы оптики, изд. во «Наука», 1970)
- 3 Rabi I. I., Phys. Rev., **51**, 652 (1937)
- 4 Hahn E. L., Phys. Rev., **77**, 297 (1950)
- 5 Brewer R. G., Shoemaker R. L., Phys. Rev., **A6**, 2001 (1972)
- 6 Crisp M. D., Phys. Rev., **A1**, 1604 (1970)
- 7 Hopf F. A., Lamb G. L. Jr., Rhodes C. K., Scully M. O., Phys. Rev. **A3**, 758 (1971)
- 8* Абрагам А. Ядерный магнетизм, ИЛ 1963
- 9* Хохлов Р. В., Радиотехн. и электр., **6**, 917 (1961)
- 10* Солуян С. И., Хохлов Р. В., ЖЭТФ, **41**, 534 (1961)
- 11* Солуян С. И., Хохлов Р. В., Вестн. МГУ, № 3, 52 (1961)
- 12* Ахманов С. А., Хохлов Р. В., Проблемы нелинейной оптики, Изд. во АН СССР 1964
- 13* Бломберген Н., Нелинейная оптика, изд. во «Мир», 1966
- 14* Ландсберг Г. С., Оптика, Гостехиздат, 1952

ОПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ БЛОХА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Точное описание взаимодействия ансамбля атомов со светом, конечно, невозможно. Более того, нельзя точно описать взаимодействие со светом даже одного атома. В данной главе сформулированы основные приближения, которые затем неоднократно используются в гл. 3—6. Главное приближение следующее: оптическое поле излучения почти монохроматично, а его частота близка к одной из частот атомных переходов. Двухуровневый атом — естественный продукт этих предположений.

Двухуровневый атом является, по сути, объектом того же рода, что и частица со спином $1/2$ в магнитном поле. Основные динамические уравнения, которые следуют из уравнения Шредингера и описывают эволюцию переменных двухуровневого атома, практически совпадают с уравнениями, описывающими спины. Отсюда следует также, что формализм Блоха для вектора спина, развитый применительно к магнитному резонансу, может быть непосредственно перенесен на задачи оптического резонанса. Чтобы облегчить это, мы введем, как обычно, вспомогательный вектор фиктивного электрического спина, или вектор псевдоспина, компоненты которого связаны с дипольным моментом и инверсией атома. Временная эволюция этого вектора определяется уравнением Шредингера. Уравнения, которым подчиняются его компоненты, часто называют оптическими уравнениями Блоха.

Помимо приближения двухуровневого атома, мы будем использовать и другие приближения, типа обычно применяемых в теории магнитного резонанса. Наиболее распространенное из них — приближение вращающейся волны (ПВВ). Привлекательность ПВВ состоит в возможности пренебречь весьма сложными эффектами в динамике псевдоспина, которые связаны с осцилляциями на удвоенной оптической частоте. Эти очень быстрые осцилляции могут привести к секулярным эффектам, которые, по крайней мере, в принципе наблюдаемы. Мы кратко обсудим наиболее важный из них — частотный сдвиг Блоха — Сигерта и по-

кажем, что его роль в оптическом резонансе пренебрежимо мала.

Двухуровневый атом обладает важной особенностью — у него единственная резонансная частота, как у классического гармонического осциллятора. И экспериментальные факты свидетельствуют о том, что во многих случаях атомы ведут себя подобно гармоническим осцилляторам. В сущности, на этом зиждется вся классическая теория дисперсии. В § 4 и 5 данной главы мы покажем, что единственное качественное различие между взаимодействием излучения с двухуровневым атомом и с классическим гармоническим осциллятором заключается в том, что классический дипольный момент непосредственно взаимодействует с напряженностью электрического поля, в то время как атомный дипольный момент связан с полем параметрически. В последнем случае параметром связи является степень возбуждения атома относительно нижайшего уровня. В обычных условиях, когда степень возбуждения невелика, квантовомеханический атом подчиняется уравнениям движения, которые полностью совпадают с классическими.

§ 2. РЕАЛЬНЫЕ АТОМЫ И ДВУХУРОВНЕВЫЙ АТОМ

Энергетические уровни реального атома зависят от взаимодействия различных его электронов. Число электронов в атоме определяет его спектроскопические термы и соответствующие правила отбора, которые указывают, между какими уровнями возможны излучательные переходы. Обычно очень трудно вычислять абсолютные значения энергии этих уровней, и тем не менее для многих реальных атомов относительное расположение энергетических уровней в пределах определенного терма согласуется с предсказаниями теории. Например, для 4F -терма интервалы между уровнями с $J = 9/2, 7/2, 5/2$ и $3/2$ относятся как $9/2 : 7/2 : 5/2$, если этот терм является идеальным примером LS -связи.

Мы не имеем возможности излагать здесь в деталях теорию атомных структур (по этому вопросу имеется обширная литература; см., например, [1, 10*]), однако учет реальной энергетической структуры имеет первостепенное значение при анализе когерентных оптических взаимодействий. Для многих целей идеально подходил бы атом, обладающий только двумя энергетическими уровнями. Хотя такие атомы в действительности не существуют, для многих когерентных резонансных взаимодействий существенны лишь два из всех атомных уровней. Поэтому двухуровневая идеализация является зачастую хорошим первым приближением. В связи с этим целесообразно напомнить сначала

главные структурные характеристики простых атомов, чтобы заложить основу и выяснить возможные ограничения двухуровневого приближения. Для простоты мы рассмотрим атомы со связью Рассела — Саундерса.

Каждому электрону в атоме соответствуют квантовые числа n , l , m_l и m_s . Некоторые группы электронов вследствие принципа Паули образуют замкнутые оболочки, отвечающие терму ¹⁾ 1S_0 , для которого $L = 0$, $S = 0$ и $J = 0$. Электроны вне этих оболочек, называемые валентными, образуют, взаимодействуя, множество термов, которые отвечают различным значениям L и S , получаемым путем векторного суммирования отдельных величин l_i и s_i для каждого из валентных электронов.

В качестве примера рассмотрим натрий, в спектре которого имеются характерные D -линии, известные не только спектроскопистам, но и всем физикам. Натрий имеет замкнутую оболочку $1s^2 2s^2 2p^6$ и один валентный электрон, наиболее сильно связанное в атоме состояние которого есть $3s$. Уже небольшие порции энергии переводят его в состояния $4s$, $5s$, ..., или $3p$, $4p$, ..., или $3d$, $4d$, Уровни энергии этого электрона имеют дублетную структуру, которая отвечает ориентации его спина «вверх» или «вниз». Основное состояние натрия отвечает терму $^2S_{1/2}$, в то время как $3p$ -электрон порождает уровни $3p^2P_{1/2}$ и $3p^2P_{3/2}$. Разрешенные электрические дипольные переходы $3p^2P_{3/2} - 3s^2S_{1/2}$ и $3p^2P_{1/2} - 3s^2S_{1/2}$ отвечают D -линиям натрия с длинами волн 5890 и 5896 Å соответственно.

В нулевом приближении спектр поглощения в области D -линий имеет вид двух бесконечно узких линий, отстоящих друг от друга на 6 Å. Но, разумеется, каждая реальная линия не является бесконечно узкой. Всякая линия излучения или поглощения атома имеет конечную ширину вследствие конечности естественного радиационного времени жизни. Эффекты типа столкновений дополнительно укорачивают время жизни возбужденного состояния и тем самым еще больше уширяют линию. Следовательно, каждому переходу можно поставить в соответствие время жизни T'_2 и однородную ширину линии $\delta\omega_0 \sim 1/T'_2$. Величина T'_2 является аналогом времени T , которое использовалось в предыдущей главе. Причина введения штриха и индекса 2 станет ясна позднее.

Столкновения обычно важнее, нежели чисто радиационные эффекты, и в разреженном газе с плотностью $10^{10} - 10^{13}$ атом/см³ столкновительное время (т. е. время жизни, обусловленное столкновениями) порядка 10^{-7} с. Спектральная линия имеет лорен-

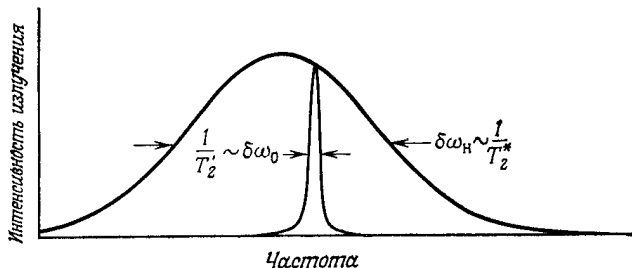
¹⁾ Здесь и далее употребляются общепринятые обозначения спектроскопических термов и одноэлектронных состояний в атомах (см. например, [1, 10*]). — Прим. ред.

цеву форму и однородную ширину $\delta\omega_0$ порядка 10^8 Гц. Соответствующая ширина в длинах волн равна

$$\delta\lambda_0 = \lambda \frac{\delta\omega_0}{\omega} \sim 10^{-3} \text{ \AA} \quad (2.1)$$

и, очевидно, очень мала по сравнению с разностью $\lambda_{D_1} - \lambda_{D_2} \sim 6 \text{ \AA}$.

Поскольку скорость каждого атома не меняется между столкновениями, лоренцева линия его излучения центрирована на определенной частоте ω_0 , которая, вообще говоря, отличается от



Фиг. 2.1. Кривая Лоренца, показывающая ширину линии, связанную с однородным радиационным и столкновительным затуханием для атомов газа.

Вследствие распределения скоростей атомов по Максвеллу — Больцману и эффекта Доплера результирующее распределение — гауссово и отвечает частотному диапазону, ширина которого гораздо больше ширины отдельной лоренцевой линии. Таким образом, при нормальных температурах и давлениях линии излучения и поглощения в газах обладают почти чисто неоднородным уширением, поэтому на фигуре $\delta\omega_n \gg \delta\omega_0$.

средней для всех атомов частоты перехода $\bar{\omega}_0$, потому что составляющая скорости атома v_z вдоль волнового вектора поля $\mathbf{k} = \mathbf{z}(\omega/c)$ ($|\mathbf{z}| = 1$), вообще говоря, отлична от нуля (эффект Доплера):

$$\omega_0 = \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_0 \left(\frac{v_z}{c} \right). \quad (2.2)$$

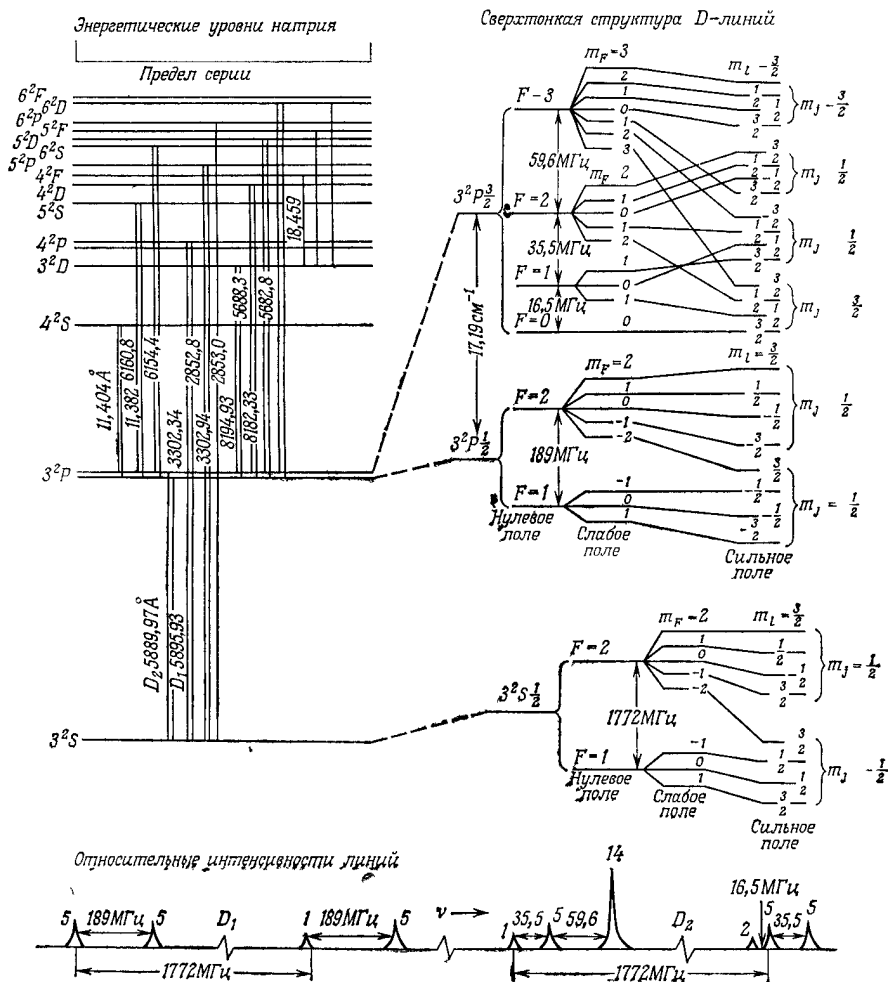
Если принять распределение Максвелла — Больцмана по скоростям, то ширина на полувысоте распределения центральных частот равна

$$\delta\omega_0 = 2\omega (2 \ln 2)^{1/2} \left(\frac{kT}{Mc^2} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура и M — масса одного атома газа. Результирующая форма спектральной линии гауссова, поскольку распределение скоростей является гауссовым. Сказанное иллюстрируется фиг. 2.1. Спектральное уширение, обусловленное эффектом Доплера, является неоднородным; в дальнейшем доплеровскую ширину обозначим через $\delta\omega_n$. В разреженных газах обычно $\delta\omega_n$ много больше столкновительной ширины:

$$\delta\omega_n \sim 10 \text{ ГГц} \gg \delta\omega_0 \sim 100 \text{ МГц}. \quad (2.4)$$

Однако соответствующая неоднородная ширина в длинах волн все еще очень мала по сравнению с 6 Å. Следовательно, D-линии натрия могут быть порознь в резонансе или вне резонанса с при-



Фиг. 2.2. Немного упрощенная диаграмма энергетических уровней натрия. Сверхтонкая структура, связанная с D-линиями, изображена не в масштабе (в увеличенном виде)

ложенным полем, если только спектр поля не перекрывает обеих линий. Для когерентных квазимонохроматических полей только субмикросекундные импульсы имеют столь большую спектральную ширину.

Само собой разумеется, что наше рассмотрение приближенное. Ведь структура каждой из D -линий сложна, поскольку ядро атома натрия обладает спином $I = 3/2$. Ядерный спин складывается с моментом J для электрона, что приводит к сверхтонкой структуре. Уровни последней обозначаются через F , где F — векторная сумма величин J и I , и каждый F -уровень сам $(2F + 1)$ -кратно вырожден. Это вырождение можно снять, приложив магнитное поле. Результирующая диаграмма энергетических уровней, соответствующая термам $3p^2P$ и $3s^2S$, показана на фиг. 2.2.

Даже если магнитное поле отсутствует и уровни сверхтонкой структуры остаются вырожденными, двухуровневое приближение для атома натрия годится не при любых характеристиках возбуждающего импульса. Например, если речь идет об оптическом эксперименте с переходом между уровнем $3p^2P_{3/2}$ ($F = 2$) и основным состоянием $3s^2S_{1/2}$ ($F = 1$), то следует обеспечить, чтобы спектр оптического импульса не захватывал уровень $3s^2S_{1/2}$ ($F = 2$) или $3p^2P_{3/2}$ ($F = 1$). Следовательно, спектр должен быть уже чем 35,5 МГц. Это означает, что длительность импульса должна превышать примерно $3 \cdot 10^{-8}$ с. С другой стороны, для того чтобы отсутствовали некогерентные возмущения, она должна быть меньше среднего времени свободного пробега атома, которое имеет порядок 10^{-7} с.

Если такой импульс имеется [2] и его центральная частота находится в резонансе с переходом $3p^2P_{3/2}$ ($F = 2$) — $3s^2S_{1/2}$ ($F = 1$), то при анализе его взаимодействия с атомом последний можно считать двухуровневым. Но даже в такой ситуации (мы увидим это на примере самоиндуцированной прозрачности в § 2 и 3 гл. 5) магнитное вырождение следует принимать во внимание. Уместно также отметить, что детали когерентного взаимодействия по-прежнему могут зависеть от диссипативных процессов типа распада путем разрешенного спонтанного перехода с уровня $3p^2P_{3/2}$ ($F = 2$) на уровень $3s^2S_{1/2}$ ($F = 2$), который обуславливает дополнительный механизм обеднения верхнего уровня. Конечно, сверхтонкая структура имеется не у всех элементов, однако изложенные общие условия в любом случае будут служить основой для решения вопроса о том, можно ли в данном конкретном эксперименте считать атом двухуровневым.

§ 3. ДВУХУРОВНЕВЫЕ АТОМЫ И ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

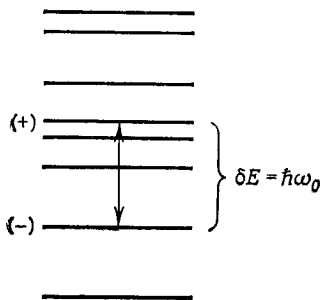
Полуклассическая теория взаимодействия излучения с веществом предшествует квантовой электродинамике. В резонансной квантовой оптике обычно используется полуклассическая теория. В данном параграфе мы сформулируем полуклассическую

теорию применительно к радиационным взаимодействиям изолированного двухуровневого атома

Интересующие нас электродипольные переходы атома, взаимодействующего с полем, можно описать следующим гамильтонианом:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H}_A - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0). \quad (2.5)$$

Здесь $\mathbf{d}$ — оператор дипольного момента атома, а $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ — оператор электрического поля в точке $\mathbf{r}_0$ нахождения диполя. Конкретизация невозмущенной полем системы не требуется. Ее гамильтониан $\hat{H}_A$ обладает некоторым дискретным спектром, часть которого схематически показана на фиг. 2.3. (Мы и далее будем отмечать «шляпкой» $\wedge$ операторы.)



Фиг. 2.3. Энергетические уровни атома.

Показаны два уровня, связанные квазирезонансным переходом

Пусть имеется квазимонохроматическое электрическое поле, частота которого близка к частоте перехода, связывающего два энергетических уровня атома с энергиями W_+ и W_- [они обозначены на фиг. 2.3 соответственно как $(+)$ и $(-)$]. Принадлежащие этим энергиям собственные функции оператора $\hat{H}_A$ обозначим через $|+\rangle$ и $|-\rangle$.

Нас будут интересовать только переходы между состояниями $|+\rangle$ и $|-\rangle$, поэтому достаточно рассматривать двумерное гильбертово пространство, натянутое на эти векторы. Укажем матричные элементы соответствующих атомных операторов:

$$\begin{aligned} \langle + | \hat{H}_A | + \rangle &= W_+, & \langle - | \hat{H}_A | - \rangle &= W_-, \\ \langle + | \hat{H}_A | - \rangle &= 0, & \langle - | \hat{H}_A | + \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{aligned} \langle + | \hat{\mathbf{d}} | + \rangle &= 0, & \langle - | \hat{\mathbf{d}} | - \rangle &= 0, \\ \langle + | \hat{\mathbf{d}} | - \rangle &= d_{+-}, & \langle - | \hat{\mathbf{d}} | + \rangle &= (d_{+-})^*. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Оператор $\hat{H}_A$ не имеет недиагональных элементов, так как состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ суть его собственные функции. С другой стороны, у оператора $\hat{\mathbf{d}}$ диагональные элементы равны нулю, поскольку этот оператор нечетен, а состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ считаются имеющими определенную четность. Для примера найдем матричные элементы d_{+-} в простом частном случае. Выберем в качестве $|+\rangle$ и $|-\rangle$ состояния (211) и (100) атома водорода [ука-

заны тройки квантовых чисел (n, l, m_l) . Тогда в координатном представлении элемент $\mathbf{d}_{+-}$ имеет вид

$$\mathbf{d}_{+-} = \int \Psi_{211}^*(\mathbf{r}) e\hat{\mathbf{r}} \Psi_{100}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.3)$$

Его можно представить как произведение радиального и углового интегралов. Если использовать известные функции состояний Ψ_{211} и Ψ_{100} для водорода, то указанные интегралы примут вид

$$\text{Радиальный интеграл} = \int \frac{1}{(2a_0^2)^{1/2}} e^{-r/2a_0} [er] \frac{2r}{a_0 \sqrt{3}} e^{-r/a_0} r^2 dr, \quad (2.9)$$

Угловой интеграл =

$$= \int Y_{11}^*(\theta, \varphi) (x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta) Y_{00}(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (2.10)$$

Оба интеграла легко вычисляются (это может быть проделано многими способами) и дают при перемножении

$$\mathbf{d}_{+-} = -\frac{2^7}{3^5} ea_0 (\mathbf{x} - iy), \quad (2.11)$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — единичные векторы, ортогональные выделенной оси квантования атома $\mathbf{z}$ и друг другу. Каждая из волновых функций $\Psi_{211}(\mathbf{r})$ и $\Psi_{100}(\mathbf{r})$ определена, как известно, с точностью до произвольной постоянной фазы, поэтому и матричный элемент $\mathbf{d}_{+-}$ имеет такую же неопределенность.

В общем случае дипольные матричные элементы являются комплексными векторами

$$\mathbf{d}_{+-} = \mathbf{d}_r + i\mathbf{d}_i, \quad \mathbf{d}_{-+} = \mathbf{d}_r - i\mathbf{d}_i, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{d}_r$ и $\mathbf{d}_i$ — вещественные векторы, свои в каждом конкретном случае. Для приведенного выше примера

$$\mathbf{d}_r = -\frac{2^7}{3^5} ea_0 \mathbf{x}$$

и

$$\mathbf{d}_i = \frac{2^7}{3^5} ea_0 \mathbf{y}.$$

Эрмитов оператор $\hat{\mathbf{d}}$ можно всегда представить как недиагональную матрицу в двумерном пространстве, обладающую матричными элементами (2.12):

$$\hat{\mathbf{d}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d}_r + i\mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_r - i\mathbf{d}_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Здесь целесообразно использовать известные двумерные матрицы Паули $\hat{\sigma}_{1,2,3}$ [11*]. Тогда оператор дипольного момента

запишется как

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_r \hat{\sigma}_1 - \mathbf{d}_i \hat{\sigma}_2, \quad (2.14)$$

а оператор $\hat{H}_A$ как

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(\mathcal{W}_+ + \mathcal{W}_-)\hat{I} + \frac{1}{2}(\mathcal{W}_+ - \mathcal{W}_-)\hat{\sigma}_3, \quad (2.15)$$

где $\hat{I}$ — единичный 2×2 -оператор.

Динамику атома можно описать в представлении Шредингера или Гейзенберга (см. [11*]). Простота коммутационных соотношений для матриц Паули

$$[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] = 2i\hat{\sigma}_3 \text{ и т. д. с циклической перестановкой} \quad (2.16)$$

делает расчет в представлении Гейзенберга в нашем случае исключительно простым. Теорию в представлении Шредингера развивали Фейнман, Вернон и Хелворт [3]. Уравнение Гейзенберга для любого оператора $\hat{O}$, не зависящего явно от времени, имеет следующий вид:

$$i\hbar \dot{\hat{O}} = [\hat{O}, \hat{\mathcal{H}}].$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\mathcal{W}_+ + \mathcal{W}_-)\hat{I} + \frac{1}{2}(\mathcal{W}_+ - \mathcal{W}_-)\hat{\sigma}_3 - \\ - (\mathbf{d}_r \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_1 + (\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Матричные операторы Паули будут удовлетворять в результате следующим трем уравнениям:

$$\dot{\hat{\sigma}}_1(t) = -\omega_0 \hat{\sigma}_2(t) + \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{E}}(t)] \hat{\sigma}_3(t), \quad (2.18a)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_2(t) = \omega_0 \hat{\sigma}_1(t) + \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_r \cdot \hat{\mathbf{E}}(t)] \hat{\sigma}_3(t), \quad (2.18б)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_3(t) = -\frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{E}}(t)] \hat{\sigma}_1(t) - \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_r \cdot \hat{\mathbf{E}}(t)] \hat{\sigma}_2(t), \quad (2.18в)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\mathcal{W}_+ - \mathcal{W}_-}{\hbar} \quad (2.19)$$

есть частота атомного перехода и оператор электрического поля записан в представлении Гейзенберга.

В рассматриваемом двумерном пространстве выполняются законы сохранения, которые автоматически следуют из свойств матриц Паули. Например, $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}_3^2 = \hat{I}$. Поучительно проверить, что матрицы Паули, рассматриваемые как зависящие от времени операторы, удовлетворяют им во все моменты времени. Свойства матричных коммутаторов позволяют легко проверить, что $\hat{\sigma}_1(t)\hat{\sigma}_1(t) + \hat{\sigma}_1(t)\hat{\sigma}_1(t) = 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_1^2(t) = 0, \text{ и потому } \hat{\sigma}_1^2(t) = \hat{\sigma}_1^2(0) = \hat{I}.$$

Вследствие операторной природы атомных и полевых переменных динамические законы, вытекающие из (2.18), весьма сложны, особенно если учесть к тому же операторные уравнения Максвелла для электрического поля. Общее решение проблемы неизвестно; некоторые частные случаи рассмотрены в гл. 7. Однако для многих приложений весьма полезны родственные уравнения, которые столь же сложны, но все переменные уже не являются операторами. Переход к ним производится в предположении, что квантовые корреляции между полем и атомом несущественны.

Если такими корреляциями можно пренебречь, то средние от произведения операторов типа $\hat{\mathbf{E}}(t) \hat{\sigma}_3(t)$ факторизуются:

$$\langle \hat{\mathbf{E}}(t) \hat{\sigma}_3(t) \rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}(t) \rangle \langle \hat{\sigma}_3(t) \rangle. \quad (2.20)$$

Определим полуклассическую теорию взаимодействия излучения с двухуровневыми атомами как теорию, базирующуюся на последовательном использовании такой факторизации в уравнениях (2.18). Если, кроме того, необходимо привлечь и уравнения Максвелла, чтобы учесть возможное обратное влияние атомов на поле $\hat{\mathbf{E}}(t)$ путем переизлучения, то в полуклассической теории используются уравнения Максвелла для средних значений поля вместо операторных уравнений Максвелла. Величина $\langle \hat{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}_0) \rangle$ здесь интерпретируется как чисто классическое электрическое поле. Существенным ограничением такой замены операторов является то, что полуклассическая теория не в состоянии правильно описать спонтанное излучение. Однако многие другие эффекты реакции излучения легко описываются ею (гл. 4).

При замене операторных уравнений (2.18) уравнениями для средних значений удобно ввести обозначение $s(t) \equiv \langle \hat{\sigma}(t) \rangle$, или

$$s_i(t) \equiv \langle \hat{\sigma}_i(t) \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Поскольку вплоть до гл. 7 операторные поля не будут рассматриваться, мы используем ради краткости обозначение $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0)$ вместо $\langle \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0) \rangle$ для среднего значения электрического поля. Уравнения для трех компонент вектора $\mathbf{s}(t)$ запишутся тогда в виде

$$\dot{s}_1(t) = -\omega_0 s_2(t) + \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0)] s_3(t), \quad (2.22a)$$

$$\dot{s}_2(t) = \omega_0 s_1(t) + \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_r \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0)] s_3(t), \quad (2.22б)$$

$$\dot{s}_3(t) = -\frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0)] s_1(t) - \frac{2}{\hbar} [\mathbf{d}_r \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_0)] s_2(t). \quad (2.22в)$$

Эти уравнения и описывают взаимодействие двухуровневого атома с электрическим полем в полуклассической теории.

Уравнения (2.22) удовлетворяют закону сохранения, который подобен операторному соотношению $\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 = 3 \times \hat{I}$. Умножая средние значения $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ соответственно на s_1, s_2, s_3 и складывая результаты, мы легко покажем, что

$$s_1^2(t) + s_2^2(t) + s_3^2(t) = \text{const.} \quad (2.23)$$

Менее очевидно то, что постоянная здесь равна единице. Чтобы показать это, представим волновую функцию в общем виде

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle, \quad (2.24)$$

т. е. как произвольную суперпозицию состояний $|+\rangle$ и $|-\rangle$. Тогда, как легко убедиться,

$$s_1(0) = \langle\psi|\hat{\sigma}_1|\psi\rangle = a^*b + ab^*, \quad (2.25a)$$

$$s_2(0) = \langle\psi|\hat{\sigma}_2|\psi\rangle = -i(a^*b - ab^*), \quad (2.25б)$$

$$s_3(0) = \langle\psi|\hat{\sigma}_3|\psi\rangle = |a|^2 - |b|^2 \quad (2.25в)$$

и

$$s_1^2(0) + s_2^2(0) + s_3^2(0) = (|a|^2 + |b|^2)^2.$$

Однако $|a|^2 + |b|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$, чем и завершается доказательство того, что

$$s_1^2(t) + s_2^2(t) + s_3^2(t) = 1. \quad (2.26)$$

Смысл соотношения (2.26) состоит в сохранении во времени нормировки состояния, т. е. полной вероятности

Напомним физический смысл средних значений $s_1(t), s_2(t)$ и $s_3(t)$. Из (2.21), (2.15) и (2.19) вытекает, что величину $\frac{1}{2}\hbar\omega_0 s_3(t)$ можно интерпретировать как внутреннюю энергию атома, отсчитанную от средней энергии $\frac{1}{2}(W_+ + W_-)$ двух рассматриваемых уровней. Обычно $s_3(t)$ называют инверсией. Для простоты величину $\frac{1}{2}(W_+ + W_-)$ можно выбрать за начало отсчета энергии и в дальнейшем опустить. Из соотношений же (2.21) и (2.14) вытекает, что величины $s_1(t)$ и $s_2(t)$ связаны с дипольным моментом атома.

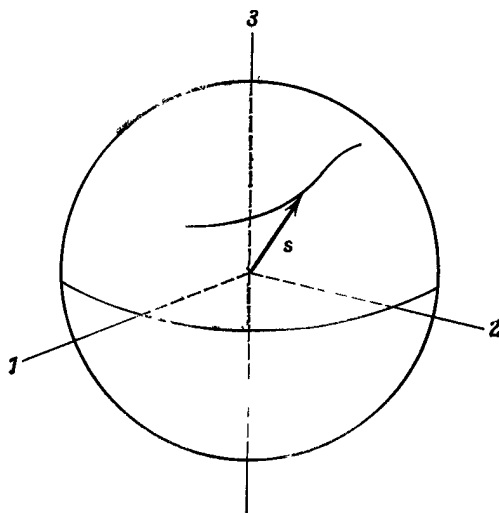
Во многих случаях разумно предположить, что состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ связаны между собой переходом с $\Delta m = 0$. При этом удобно подобрать фазы этих состояний так, чтобы вектор $\mathbf{d}$ был вещественным ($\mathbf{d}_i = 0$); одновременно введем обозначение

$$\frac{2}{\hbar} \mathbf{d}_r \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{2d}{\hbar} \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{E} \equiv \kappa E, \quad (2.27)$$

т. е. скаляр E есть компонента поля $\mathbf{E}$ вдоль единичного вектора $\mathbf{u}_d$, а постоянная κ определена тождеством

$$\frac{\hbar \kappa}{2} \equiv d; \quad (2.28)$$

$\mathbf{u}_d$ и d определяют направление и величину матричного элемента диполя. Переходы с $\Delta m = \pm 1$ обсуждаются в § 7 гл. 4.



Фиг. 2.4. Вектор псевдоспина $\mathbf{s}$, вычерчивающий орбиту на единичной сфере.

Запишем полуклассические уравнения для атома в более простой форме:

$$\dot{s}_1(t) = -\omega_0 s_2(t), \quad (2.29a)$$

$$\dot{s}_2(t) = \omega_0 s_1(t) + \kappa E(t, \mathbf{r}_0) s_3(t), \quad (2.29б)$$

$$\dot{s}_3(t) = -\kappa E(t, \mathbf{r}_0) s_2(t). \quad (2.29в)$$

Результаты нескольких следующих глав базируются главным образом на их использовании. Это электродипольный аналог уравнений, которые описывают прецессию спинов при магнитном резонансе [4, 12*], поэтому $\mathbf{s}(t)$ можно назвать электродипольным вектором «псевдоспина»¹⁾. Закон сохранения (2.26) означает, что $\mathbf{s}(t)$ является единичным вектором. Следовательно, при взаимодействии двухуровневого атома с полем конец вектора псевдоспина $\mathbf{s}(t)$ вычерчивает орбиту на единичной сфере. Часть такой орбиты показана на фиг. 2.4.

¹⁾ В этой связи употребляется также термин «энергетический спин» [13*] — Прим ред.

§ 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

Уравнения движения псевдоспина (2 29) можно проанализировать подобно соответствующим уравнениям теории магнитного резонанса [4, 5]. В частности, их можно представить так, как если бы мы имели дело с прецессией твердого тела под действием известного вращающего момента Ω^F (индекс F относится к системе координат, образованной тремя неподвижными единичными векторами $1, 2, 3$). Три уравнения (2 29) эквивалентны одному векторному

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(t) = \Omega^F(t) \times \mathbf{s}(t), \quad (2.30)$$

причем вектор $\mathbf{s}$ имеет компоненты s_1, s_2, s_3 , а вектор «вращающего момента» $\Omega^F(t)$ — компоненты

$$\Omega_1^F(t) = -\kappa E, \quad (2.31a)$$

$$\Omega_2^F(t) = 0, \quad (2.31б)$$

$$\Omega_3^F(t) = \omega_0. \quad (2.31в)$$

Ясно, что за прецессию псевдоспина ответственны первая и третья компоненты.

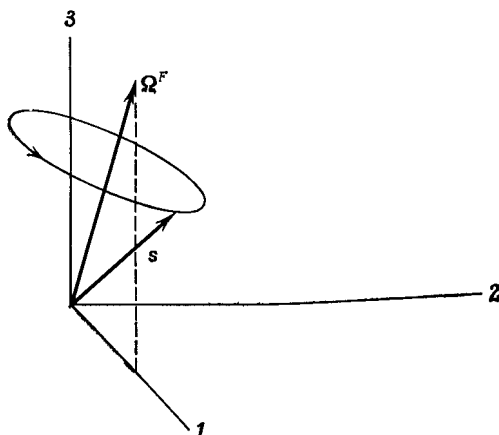
Оценим относительные величины компонент вектора Ω^F для типичных значений поля E и частоты перехода ω_0 . С этой целью определим напряженность поля, при которой компоненты $\Omega_{1,3}^F$ будут близки по абсолютной величине: $\hbar\kappa E \approx \hbar\omega_0$. Энергия оптических переходов будет порядка 1 эВ. Далее, дипольные моменты оптических переходов обычно не очень сильно отличаются от величины (2.11), поэтому с учетом (2 28) можно приближенно положить $\hbar\kappa \approx ea_0$, где a_0 — боровский радиус. Таким образом, приближенное равенство $\hbar\kappa E \approx \hbar\omega_0$ будет выполнено, если $E \approx 1 \text{ В}/a_0$, или $E \approx 10^8 \text{ В}/\text{см}$. Столь большие напряженности поля соответствуют плотностям мощности порядка $10^{15} \text{ Вт}/\text{см}^2$. Хотя такой уровень мощности и достигим с помощью современных лазеров, он на много порядков выше значений, обычно используемых в резонансных экспериментах.

К тому же в резонансных экспериментах в принципе нельзя использовать внешние поля, удовлетворяющие равенству $\hbar\kappa E \approx \hbar\omega_0$. В самом деле, для электродипольных переходов (даже между низко расположенными атомными уровнями) энергии переходов сравнимы с энергией ионизации. Например, для дипольных переходов между наинизшими уровнями, порождающих D -линии натрия, энергии возбуждения равны около 2 эВ, что составляет, грубо говоря, $2/5$ энергии ионизации основного состояния $3s^2S_{1/2}$. Для водорода соответствующая доля равна $3/4$.

Поэтому можно приближенно положить

$$\hbar\omega_0 \approx \frac{e^2}{a},$$

где e^2/a есть примерно энергия ионизации одиночного валентного электрона на орбите радиусом a в поле однократно заряженного атомного остова, образованного ядром и электронами внутренних оболочек. В то же время $\hbar\kappa E \approx eaE$, поскольку величина



Фиг. 2.5. Прецессия единичного вектора псевдоспина s вокруг неподвижного вектора вращающего момента Ω^F .

ea порядка дипольного момента перехода того же электрона. Итак, соотношение $\hbar\kappa E \approx \hbar\omega_0$ эквивалентно

$$E \approx \frac{e}{a^2}.$$

Другими словами, внешнее поле, достаточно сильное, чтобы удовлетворить равенству $\kappa E \approx \omega_0$, должно быть порядка связывающего поля e/a^2 , которое удерживает электрон на орбите. В присутствии столь сильного внешнего поля атомы могут ионизоваться вместо того, чтобы совершать резонансные переходы. Следовательно, в большинстве практически интересных для нас ситуаций будет выполняться неравенство $\kappa E \ll \omega_0$.

Таким образом, вектор «вращающего момента» Ω^F почти параллелен оси 3 с малым наклоном в направлении оси 1. Далее, как ясно из (2.30), вектор «псевдоспина» электрического диполя $s(t)$ прецессирует вокруг момента $\Omega^F(t)$ (фиг. 2.5). При графическом изображении прецессии на фиг. 2.5 подразумевается, что вектор, вокруг которого она происходит [в данном случае $\Omega^F(t)$], изменяется во времени медленно по сравнению

с прецессирующим вектором $\mathbf{s}(t)$. В рассматриваемом случае этого, очевидно, нет. Действительно, компоненты вектора $\mathbf{s}(t)$ изменяются во времени с частотой ω_0 , а внешнее поле

$$E(t) = \mathcal{E}(t)[e^{i\omega t} + \text{к. с.}] \quad (2.32)$$

— с частотой ω , причем в интересном для нас случае резонанса $\omega \approx \omega_0$, так что вектор $\Omega^F(t)$ на самом деле изменяется не медленно, а быстро. Итак, фиг. 2.5 неадекватна в нашем случае, потому что «псевдоспин» $\mathbf{s}(t)$ не успеет сделать полный оборот вокруг вектора «вращающего момента» $\Omega^F(t)$, до того как вектор момента заметно сдвинется.

В теории магнитного резонанса разработан способ упрощения таких ситуаций: от неподвижной системы отсчета переходят к системе, которая вращается с частотой ω . При этом число быстро изменяющихся переменных уменьшается, и вновь становится возможным наглядное изображение прецессии. Вектор Ω^F представляется тогда в виде суммы трех «вращающихся моментов», один из которых, а именно Ω^0 , направлен вдоль оси 3, а два других, гораздо меньших по величине, лежат строго в плоскости 1—2:

$$\Omega^F = \Omega^+(t) + \Omega^-(t) + \Omega^0, \quad (2.33)$$

где

$$\Omega^0 = (0, 0, \omega_0), \quad (2.34a)$$

$$\Omega^+ = (-\kappa\mathcal{E} \cos \omega t, -\kappa\mathcal{E} \sin \omega t, 0), \quad (2.34б)$$

$$\Omega^- = (-\kappa\mathcal{E} \cos \omega t, +\kappa\mathcal{E} \sin \omega t, 0). \quad (2.34в)$$

Ясно, что с ростом t вектор Ω^+ поворачивается, если смотреть с конца вектора 3, против часовой стрелки, а Ω^- — по часовой стрелке. Поскольку $\omega_0 \gg \kappa\mathcal{E}$, то естественная прецессия вектора $\mathbf{s}$ происходит в основном вокруг оси 3. В системе координат, следующей за $\mathbf{s}$ и вращающейся вокруг оси 3 против часовой стрелки с угловой скоростью ω (подобно карусели), вектор Ω^+ неподвижен, а вектор Ω^- вращается по часовой стрелке с угловой скоростью 2ω . В такой системе координат воздействие вектора момента Ω^+ на спин непрерывно накапливается во времени. Воздействие же момента Ω^- реверсируется с частотой 10^{15} — 10^{16} Гц и потому практически незаметно. Приближение «вращающейся волны» (ПВВ) заключается в пренебрежении влиянием вращающегося момента Ω^- и замене вектора Ω^F в соответствующих уравнениях движения псевдоспина вектором $\Omega^+ + \Omega^0$. Тогда

$$\dot{s}_1 = -\omega_0 s_2 - \kappa\mathcal{E} s_3 \sin \omega t,$$

$$\dot{s}_2 = \omega_0 s_1 + \kappa\mathcal{E} s_3 \cos \omega t,$$

$$\dot{s}_3 = -\kappa\mathcal{E} [s_2 \cos \omega t - s_1 \sin \omega t].$$

Что же видит наблюдатель, вращающийся вместе с системой координат? Выяснить это можно по-разному. Льюисел [5] применил для этой цели алгебру угловых моментов и квантовую теорию вращения. Другой метод, которым мы и воспользуемся, состоит в переходе при помощи соответствующей матрицы поворота от вектора $\mathbf{s}$ к новому, квазистационарному вектору $\mathbf{\rho}$ с компонентами u, v, w во вращающейся системе координат:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Уравнения движения для компонент псевдоспина $\mathbf{\rho}$ во вращающейся системе таковы:

$$\dot{u} = -(\omega_0 - \omega) v, \quad (2.36a)$$

$$\dot{v} = (\omega_0 - \omega) u + \kappa \mathcal{E} w, \quad (2.36b)$$

$$\dot{w} = -\kappa \mathcal{E} v. \quad (2.36v)$$

Если ввести во вращающейся системе вращающий момент

$$\mathbf{\Omega} \equiv (-\kappa \mathcal{E}, 0, \omega_0 - \omega), \quad (2.36r)$$

то скалярные уравнения (2.36) можно будет записать в виде единого векторного уравнения

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\rho} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\rho}. \quad (2.36d)$$

Уравнения (2.36) показывают, что в случае ПВВ во вращающейся системе координат все переменные изменяются во времени медленно, так как $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$.

Физический смысл величин u, v и w можно выяснить, проследив их связь с основными операторами гамильтониана. Из результатов § 3 и того, что, согласно (2.35), $w = s_3$, вытекает, что величина $^{1/2} \hbar \omega_0 w$ есть среднее значение невозмущенной энергии атома. Другими словами, w есть разность населенностей для одиночного атома¹⁾; назовем ее инверсией. Далее, обращая преобразование (2.35), заключаем, что u и $-v$ суть синфазная с полем E и квадратурная (сдвинутая по фазе на 90°) компоненты атомного дипольного момента, выраженные в единицах момента перехода d . Уравнение (2.36v) подтверждает такую

¹⁾ Действительно, средняя энергия двухуровневого атома, отсчитанная от уровня энергии $(W_+ + W_-)/2$, есть, очевидно, $(\hbar \omega_0/2) n'_+ - (\hbar \omega_0/2) n'_- = (\hbar \omega_0/2) (n'_+ - n'_-)$, где n'_+, n'_- — населенности соответствующих уровней в расчете на один атом. Населенность уровня для одного атома есть полное число атомов на данном уровне энергии, отнесенное к общему их числу. — *Прим. ред.*

идентификацию, прямо указывая, что v есть компонента, которая определяет эффективность взаимодействия с полем, ответственного за изменение энергии. Другими словами, v есть абсорбционная компонента дипольного момента, а u — дисперсионная¹⁾.

Поскольку преобразование (2.35) есть поворот системы координат, длины векторов при таком преобразовании не меняются. Поэтому соотношение (2.26), определяющее закон сохранения вероятности, можно представить в виде

$$u^2(t) + v^2(t) + w^2(t) = 1. \quad (2.37)$$

Легко показать, что это соотношение непосредственно согласуется с уравнениями движения (2.36) для вектора псевдоспина во вращающейся системе координат.

§ 5. АНАЛОГИЯ И РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКИМ И ПОЛУКЛАССИЧЕСКИМ ДИПОЛЬНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Для развития физической интуиции полезно отметить сходство полуклассических уравнений во вращающейся системе координат с уравнениями гл. 1 для классического диполя. В частности, если в уравнениях (2.36) положить $w = -1$, то уравнения (2.36а) и (2.36б) станут идентичны уравнениям (1.18) для амплитуды классического диполя в отсутствие потерь.

Столь тесная связь между уравнениями квантового и классического диполей очень важна. Поскольку $w(t)$ — инверсия одиночного атома, равенство $w(t) \approx -1$ означает, что атом очень близок к своему основному состоянию. Итак, во всех случаях, когда атом практически не возбужден, он должен вести себя классически, подобно осциллятору Лоренца. Это объясняет, почему квантовомеханическая дисперсионная формула Крамерса — Гейзенберга (см. [6]) выглядит в точности, как дисперсионная формула Лоренца. Оптическая дисперсионная формула Крамерса — Гейзенберга найдена с помощью теории возмущения; следовательно, при ее выводе молчаливо принималось, что атомное состояние в задаче о дисперсии всегда близко к начальному состоянию, которым в задаче о дисперсии является, конечно, основное состояние.

Единственное различие между квантовым и классическим диполями связано с постоянной κ . Классическое κ , определенное равенством (1.19), фактически произвольно, так как амплитуда классического осциллятора x_0 не ограничена. В полуклассической же теории постоянная κ определена через матричный эле-

¹⁾ Употребляются также термины «активная» и «реактивная» составляющие [14*]. — Прим. ред.

мент атомного диполя d и потому ограничена. В этом смысле полуклассические уравнения (2.36) служат естественным обобщением чисто классических уравнений: величина d дает оценку того предельного значения, которое ex_0 может принимать в классической теории, еще до обращения к квантовой теории.

Другое различие квантовой и классической теорий выявляется, если учесть, что величина $u^2 + v^2$ есть квадрат безразмерной амплитуды дипольного момента в обеих теориях. Но только в квантовой теории существует соотношение

$$u^2 + v^2 = 1 - \omega^2,$$

из которого вытекает, что дипольный момент обращается в нуль при максимальной и минимальной энергиях диполя, когда $\omega = \pm 1$ соответственно. Наиболее интересные когерентные резонансные эффекты происходят вдали от области применимости классической модели «гармонического осциллятора» для атомов — эффекты, которые наблюдаются при ω , существенно отличающемся от -1 .

§ 6. СДВИГ БЛОХА — СИГЕРТА

Рассуждения, которые приводят к приближению вращающейся волны, не вполне безупречны. Ведь, в конце концов, ПВВ — приближенный метод. В 1940 г. Блох и Сигерт показали [7], что вращающийся по часовой стрелке момент Ω^- , которым в данном приближении пренебрегают, может привести к сдвигу резонансной частоты диполей. Они впервые нашли поправку к частоте ω_0 , обусловленную воздействием Ω^- . Впоследствии Шерли [8] нашел более полное выражение для этой поправки. Мы следуем изложению Триси [9].

В случае ПВВ точный резонанс между возбуждающим полем и псевдоспином реализуется, когда частота поля ω совпадает с частотой спинового перехода ω_0 . Для уточнения резонансной частоты по сравнению с ПВВ изучим влияние вращающегося момента Ω^- . В системе координат, вращающейся против часовой стрелки вокруг оси 3 с частотой ω , точный вращающийся момент, включающий Ω^- , равен

$$\Omega(+\omega) = [-\kappa\mathcal{E} - \kappa\mathcal{E} \cos 2\omega t, \kappa\mathcal{E} \sin 2\omega t, \omega_0 - \omega]. \quad (2.38)$$

В отличие от ПВВ здесь удержаны величины, осциллирующие с частотой 2ω ; пренебрежение ими ведет к уравнениям во вращающейся системе координат (2.36). Некоторые простые соображения, связанные с точным выражением для вращающегося момента (2.38), наводят на мысль о том, что возможно приближение, лучшее, чем ПВВ. Например, очевидно, что если частота поля ω равна $1/3\omega_0$, то естественная прецессия около оси 3, определяемая постоянной составляющей $\omega_0 - \omega$ вращающегося момента, будет происходить против часовой стрелки с частотой $2/3\omega_0$. В то же время момент Ω^- приводит к вращению по часовой стрелке вокруг оси 3 с той же частотой $2/3\omega_0$. Поэтому можно ожидать, что существует система координат, в которой собственная прецессия и вращающаяся часть момента имеют не только одинаковые частоты, но и одинаковые направления вращения.

Анализ выражений для компонент (2.38) точного вращающегося момента показывает, что если такая система координат существует, то она должна быть системой координат с вращением по часовой стрелке и $\omega \approx -\omega_0$, так как тогда в этой системе координат частота вращающейся части момента 2ω

будет приблизительно равна собственной частоте прецессии $\omega_0 - \omega \approx 2\omega_0$. Конечно, в такой системе координат динамика спина будет непривычно сложной, но получение самих резонансных условий может оказаться достаточно простым. Составные части точного вращающего момента в системе координат, вращающейся по часовой стрелке, изображены на фиг. 2.6. Выражение для этого момента, который мы обозначим через $\Omega(-\omega)$, можно записать двумя способами:

$$\Omega(-\omega) = [-\kappa \mathcal{E} (1 + \cos 2\omega t), -\kappa \mathcal{E} \sin 2\omega t, \omega_0 + \omega] \quad (2.39a)$$

или

$$\Omega(-\omega) = \Omega_{eff} + \Omega_{rot}. \quad (2.39b)$$

Выражение (2.39a) показывает, что вращающаяся часть момента $\Omega(-\omega)$ равна

$$\Omega_{rot} = -\kappa \mathcal{E} \cos 2\omega t - 2\kappa \mathcal{E} \sin 2\omega t. \quad (2.40a)$$

Постоянная часть момента $\Omega(-\omega)$ образует статический «эффективный» момент

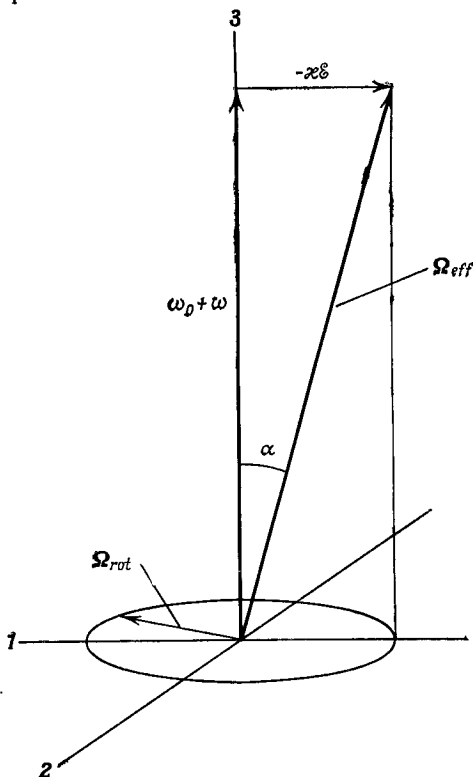
$$\Omega_{eff} = u_{eff} \sqrt{(\kappa \mathcal{E})^2 + (\omega + \omega_0)^2} \quad (2.40b)$$

Здесь единичный вектор

$$u_{eff} = -1 \sin \alpha + 3 \cos \alpha, \quad (2.41)$$

а малый угол α показан на фиг. 2.6.

Чтобы получить условие резонанса, необходимо далее лишь повторить то, что ранее было сделано в связи с выражениями (2.33). Следует расщепить переменное слагаемое Ω_{rot} полного момента $\Omega(-\omega)$ на две части, вращающиеся по направлению и против направления собственной прецессии, которая задается статической



Фиг. 2.6. Разложение результирующего вектора вращающего момента во вращающейся системе координат на статическую Ω_{eff} и вращающуюся Ω_{rot} составляющие, причем $\Omega_{eff} \gg \Omega_{rot}$.

Система координат вращается с угловой скоростью ω_0 по часовой стрелке.

частью момента $\Omega(-\omega)$. В данном случае у нас имеется также часть, параллельная u_{eff} .

Для удобства можно ввести новые координатные оси вдоль единичных векторов $1'$, $2'$, $3'$, определенных так, что $3' = u_{eff}$ и $2' = 2$. Тогда вектор u_{eff} послужит новой полярной осью, а оси $1'$ и $2'$ будут перпендикулярны ей; мы получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{rot} = & -\kappa \mathcal{E} \sin \alpha \cos 2\omega t \{3'\} - \kappa \mathcal{E} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) \{1' \cos 2\omega t + 2' \sin 2\omega t\} - \\ & - \kappa \mathcal{E} \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right) \{1' \cos 2\omega t + 2' \sin 2\omega t\}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где каждая из фигурных скобок содержит единичный вектор. Последние две фигурные скобки представляют возбуждающие моменты перпендикулярные статическому моменту Ω_{eff} и вращающиеся вокруг него с частотами $\pm 2\omega$. Итак имеются два резонансных условия

$$\pm 2\omega = |\Omega_{eff}| = \sqrt{(\kappa\mathcal{E})^2 + (\omega_0 + \omega)^2}, \quad (2.43)$$

и два решения

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa\mathcal{E}}{\omega_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.44a)$$

и

$$\omega = -\frac{1}{3} \omega_0 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\kappa\mathcal{E}}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (2.44b)$$

При обычном условии $\kappa\mathcal{E} \ll \omega_0$ которое принято нами в этих разложениях первое решение гораздо важнее так как оно соответствует моменту вращающемуся против часовой стрелки т.е. второму члену в выражении (2.42). Отношение амплитуды третьего члена вращающегося по часовой стрелке к амплитуде второго члена, вращающегося против часовой стрелки весьма мало

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \approx \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa\mathcal{E}}{\omega_0} \right)^2.$$

Второе решение и третий член в (2.42) соответствуют взаимодействию между атомом и полем на третьей субгармонике

Поправка к ω_0 в решении (2.44a) известна как сдвиг Блоха — Сигерта

$$\delta\omega_{B-S} = \frac{1}{4} \frac{(\kappa\mathcal{E})^2}{\omega_0}. \quad (2.45)$$

Величина этого сдвига на оптических частотах очень мала. Например π им. пультс длительностью в 1 нс вызывает сдвиг порядка

$$\delta\omega_{B-S} \approx \sim 10^{-10} \omega_0,$$

слишком малый для наблюдения. Интересно, что сдвиг Блоха — Сигерта представляет собой секулярный эффект, хотя и малый и возникает за счет вращающейся по часовой стрелке части Ω^- полного момента Ω^F [см выражение (2.33)]

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Woodgate G K, Elementary Atomic Structure, New York, 1970
- 2 Kuhn H G Atomic Spectra, 2nd ed London, 1971
- 3 Hansch T W, Shahin I S, Schawlow A L, Phys Rev Lett 27, 707 (1971)
- 4 Schuda F, Hercher M, Stroud C R Jr Appl Phys Lett 22, 360 (1973)
- 5 Feynman R P, Vernon F L, Jr, Hellwarth R W, J Appl Phys 28, 49 (1957)
- 6 Bloch F Phys Rev, 70, 460 (1946)
- 7 Louisell W Quantum Statistical Properties of Radiation New York 1973, Sec 5.11
- 8 Heitler W The Quantum Theory of Radiation London, 1954 (См перевод В Гайтлер Квантовая теория излучения ИЛ 1956)
- 9 Bloch F, Siegert A J F Phys Rev 57, 522 (1940)
- 10 Stevenson A F, Phys Rev 58, 1061 (1940)

8. Shirley J. H., Phys. Rev., **138**, 8979 (1965); см. также в J. Phys., **B6** (August 1973).
Cohen-Tannoudji et al., J. Phys., **B6** (August 1973).
Hannaford et al., J. Phys., **B6** (August 1973).
Stenholm, J. Phys., **B6**, (August 1973).
9. Treacy E. B., в книге The Physics of Quantum Electronics, 1969, Optical Sciences Center Technical Report 45, eds. J. B. Mandelbaum, S. F. Jacobs, University of Arizona, 1969, p. 169.
- 10*. Собельман И. И., Введение в теорию атомных спектров, Физматгиз, 1963.
- 11*. Давыдов А. С., Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
- 12*. Абрагам А., Ядерный магнетизм, ИЛ, 1963.
- 13*. Файн В. М., Ханин Я. И., Квантовая радиофизика, изд-во «Сов. радио», 1965.
- 14*. Полужков И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С., УФН, **114**, 97 (1974).

ДВУХУРОВНЕВЫЕ АТОМЫ В СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях весьма плодотворным оказывается детальное изучение простейших взаимодействий, поскольку здесь наиболее рельефно выступают основные теоретические закономерности, присущие данному кругу явлений. Поэтому мы посвятим настоящую главу изучению взаимодействий, при которых амплитуда электрического поля постоянна во времени¹⁾ и в пространстве. При этом мы не накладываем никаких ограничений на величину напряженности поля, допуская, что она может быть очень большой. В рамках такого подхода удастся описать целый ряд классических явлений. В частности, можно без особых трудностей решить уравнения Блоха во вращающейся системе координат, выведенные в гл. 2, и найти осцилляции атомной инверсии при наличии расстройки и уширения, обусловленного интенсивным полем. Они аналогичны осцилляциям в явлениях магнитного резонанса, которые были описаны Раби еще более 30 лет назад.

В § 4 при изучении динамики двухуровневого атома учтены некогерентные взаимодействия, причем они могут быть и неэлектромагнитного происхождения. Это сделано путем введения феноменологических констант релаксации, подобно тому как Блох учел релаксационные эффекты в теории магнитного резонанса. Указанные константы должны учесть влияние столкновений, естественного спонтанного распада и других некогерентных процессов, уширяющих линию.

Решение уравнений Блоха с феноменологическими константами затухания впервые нашел Торри. Мы воспроизведем некоторые частные случаи его результатов и используем их для обсуждения недавних экспериментов по оптической нутации и

¹⁾ Точнее говоря, имеется в виду, что амплитуда электрического поля не зависит от времени на интервале между моментами включения t_1 и выключения t_2 поля (прямоугольные импульсы). В частности, может быть, конечно, $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$, т. е. амплитуда поля постоянна при любых t . — *Прим. ред.*

затуханию свободной поляризации. Здесь убедительно подтверждаются основные предсказания Раби об осцилляциях инверсии и их проявлениях.

§ 2. π -ИМПУЛЬСЫ

Уже несколько десятилетий назад уравнения движения, введенные в § 4 гл. 2, использовались для описания важного явления диссипации энергии спином во внешнем высокочастотном поле с постоянной амплитудой. Аналогичный расчет можно провести и для оптических частот, понимая теперь под «спином» вектор Блоха, изображающий двухуровневый атом. Обсудим сначала данное Раби [1] решение уравнений для вектора Блоха, поскольку оно служит простой основой для обобщения в целях учета более сложных взаимодействий, связанных с двухуровневыми атомами в стационарных полях.

Решение Раби выглядит наиболее просто при точном резонансе атома с лазерным полем. В этом случае нужно решать фактически только два из уравнений (2.36). Их решение соответствует вращению вокруг оси **1** во вращающейся системе координат. Введем безразмерную величину $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \kappa \mathcal{E}(t') dt'. \quad (3.1)$$

Тогда решения уравнений (2.36) можно представить в виде

$$u(t; 0) = u_0, \quad (3.2a)$$

$$v(t; 0) = w_0 \sin \theta(t) + v_0 \cos \theta(t), \quad (3.2б)$$

$$w(t; 0) = -v_0 \sin \theta(t) + w_0 \cos \theta(t), \quad (3.2в)$$

где $u_0 = u(0; 0)$ и т. д.¹⁾ Нулевое значение второго аргумента у $v(t; 0)$ и $w(t; 0)$ относится к частотной расстройке $\Delta = \omega_0 - \omega$. Очевидно, что величину $\theta(t)$ можно интерпретировать как угол поворота «снизу вверх» вектора ρ для резонансного атома (фиг. 3.1).

Когда амплитуда приложенного поля отлична от нуля лишь на интервале между моментами времени t_1 и t_2 и равна на нем $\mathcal{E}_0$, интеграл (3.1) легко вычисляется:

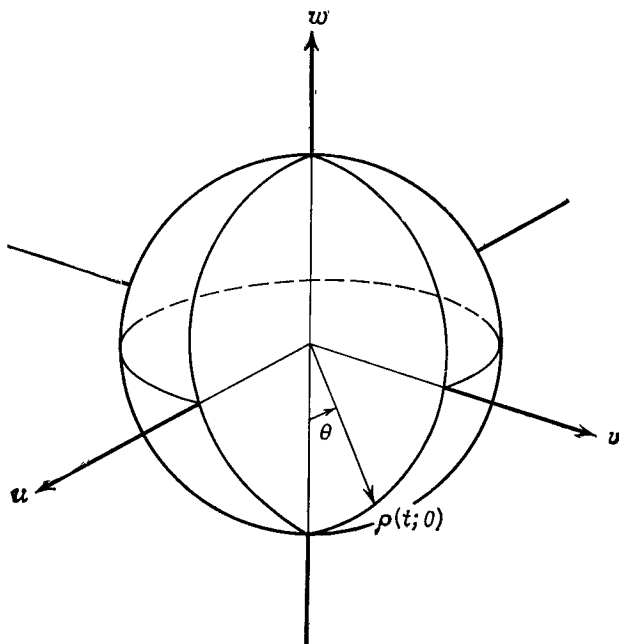
$$\theta = \kappa \mathcal{E}_0 (t_2 - t_1) = \Omega(0) (t_2 - t_1); \quad (3.3)$$

величина $\Omega(0) = \kappa \mathcal{E}_0$ называется резонансной частотой Раби.

Частота Раби равна скорости, с которой когерентно возбуж-

¹⁾ Авторы неявно предполагают, что $\theta(t=0) = 0$. Практически наиболее важный относящийся сюда случай соответствует включению импульса при $t \geq 0$. — Прим. ред.

даются переходы между двумя атомными уровнями. Если первоначально атом находился в основном состоянии, так что $w_0 = -1$ и $v_0 = 0$, то, как следует из выражения (3.2в), по истечению времени δt , такого, что $\kappa \mathcal{E}_0 \delta t = \pi$, инверсия будет равна



Фиг. 3.1. Вектор Блоха $\rho(t; 0)$ повернут на угол $\theta(t)$, определенный выражением (3.1).

Введение угла θ имеет прямой смысл лишь для тех атомов, которые находятся в точном резонансе с полем. Поэтому угол θ лежит в плоскости $v-w$. Он считается положительным при повороте вокруг оси u против часовой стрелки.

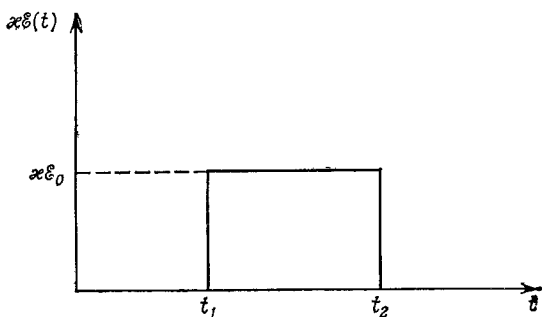
$w = +1$, т. е. атом окажется в верхнем состоянии. Другими словами, когерентная световая волна в форме прямоугольного импульса, изображенного на фиг. 3.2, точно инвертирует атом из основного состояния, если $\kappa \mathcal{E}_0(t_2 - t_1) = \pi$. Такой импульс называют π -импульсом. Этот термин имеет буквальный смысл для истинного спина: π -импульс высокочастотного магнитного поля изменяет ориентацию спина с параллельной по отношению к статическому магнитному полю на противоположную.

Величина $\kappa \mathcal{E}_0(t_2 - t_1)$, определяющая полный угол поворота θ под действием импульса, в точности равна площади под

кривой на фиг. 3.2 в согласии с определением площади импульса $A(t)$, данным в гл. 1,

$$A(t) = \kappa \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt' = \theta(t), \quad (3.4)$$

которое обобщается теперь на случай, когда κ вводится в квантовой форме. Итак, площадь под огибающей импульса непосредственно связана с наглядным атомным параметром — углом θ ,



Фиг. 3.2. Огибающая прямоугольного импульса, умноженная на κ . Площадь под кривой является «площадью импульса»

на который импульс поворачивает вектор Блоха для атомов, находящихся в точном резонансе. Этот факт не только замечателен сам по себе, но и сильно помогает изобразить воздействие импульсов на атомы. Очевидно, что в теории особенно важны резонансные импульсы с площадями π , 2π , 3π , ..., так как они способны инвертировать атомную населенность соответственно 1, 2, 3, ... раз.

Можно привести более общее доказательство того, что решение (3.2) описывает вращение вокруг оси 1. С этой целью представим уравнения (2.36) во вращающейся системе координат как одно эквивалентное векторное уравнение прецессии для вектора ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \Omega \times \rho. \quad (3.5)$$

Вектор Блоха ρ и вращающий момент Ω имеют во вращающейся системе координат компоненты

$$\rho = (u, v, w), \quad (3.6)$$

$$\Omega = (-\kappa\mathcal{E}, 0, \Delta). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.5) можно записать также в следующем развернутом виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta & 0 \\ +\Delta & 0 & \kappa \mathcal{E} \\ 0 & -\kappa \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

В частном случае атомов, находящихся в точном резонансе, $\Delta = 0$, из (3.8) ясно, что прецессия происходит только вокруг оси 1.

§ 3. РЕШЕНИЕ РАБИ

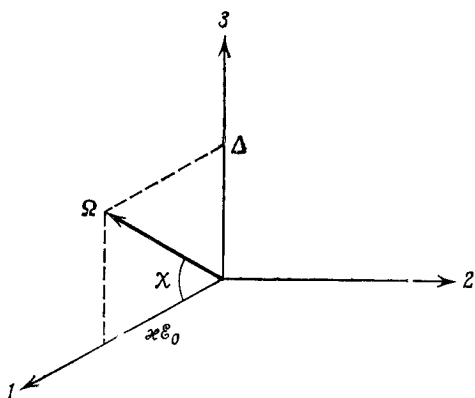
Решением уравнения (3.5) при произвольной расстройке Δ также является вращение. Аналитически описать прецессию вокруг Ω в наиболее общем случае не удастся. Однако если ограничиться случаем Раби, когда амплитуда $\mathcal{E}$ равна постоянной величине $\mathcal{E}_0$, то решение в аналитическом виде найти нетрудно. Для нерезонансного случая Раби вектор Ω во вращающейся системе координат постоянен и расположен в плоскости 1—3 (фиг. 3.3). В этом случае решение уравнений (2.36) или (3.5) выполняется путем двух последовательных поворотов¹⁾. Первый — вокруг оси 2 на угол χ , показанный на фиг. 3.3, причем

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\Delta}{\kappa \mathcal{E}_0}. \quad (3.9)$$

Этот поворот совмещает Ω с осью 1. Вектор Блоха

ρ , конечно, тоже изменяется при повороте системы координат, становясь равным $\rho' = (u', v', w')$, причем

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & \sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$



Фиг. 3.3. Вектор вращающего момента во вращающейся системе координат постоянен и лежит в плоскости 1—3. Угол χ определен формулой (3.9).

¹⁾ Речь идет фактически о том, чтобы решить уравнение (3.5), выразив компоненты u, v, w вектора ρ через его компоненты в системе координат, которая вращается вокруг вектора Ω с угловой скоростью $\Omega(\Delta)$, численно равной его длине (в этой системе, очевидно, $\rho = \text{const}$). Это можно сделать, совершая последовательно повороты, рассматриваемые в данном параграфе. — Прим. ред.

С учетом этого соотношения уравнение (3.8) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega(\Delta) \\ 0 & -\Omega(\Delta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ясно, что псевдоспин ρ' прецессирует теперь около новой оси 1 с частотой

$$\Omega(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2}. \quad (3.12)$$

Величина $\Omega(\Delta)$ есть частота Раби при произвольной расстройке Δ . Второй поворот производим вокруг новой оси 1 против часовой стрелки на угол $-\Omega(\Delta)t$; он ведет к системе координат, в которой вектор псевдоспина $\rho'' = (u'', v'', w'')$ стационарен, причем

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ 0 & -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Связь вектора (u'', v'', w'') с вектором (u, v, w) для произвольного момента времени определяется формулами (3.10) и (3.13). При $t=0$ преобразование (3.13) принимает особенно простой вид и вектор $\rho'' = (u'', v'', w'')$ становится возможным отождествить с начальным вектором Блоха (u_0, v_0, w_0) [с точностью до преобразования, обратного фигурирующему в (3.10)]:

$$u_0 \equiv u(0; \Delta), \quad v_0 \equiv v(0; \Delta), \quad w_0 \equiv w(0; \Delta).$$

Комбинируя это выражение для вектора (u'', v'', w'') с уравнениями (3.10) и (3.13), находим искомое решение, связывающее (u, v, w) и (u_0, v_0, w_0) :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & \sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ 0 & -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Фигурирующее здесь произведение преобразований эквивалентно одному очень сложному повороту:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\kappa \mathcal{E}_0)^2 + \Delta^2 \cos \Omega t}{\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\Omega} \sin \Omega t & -\frac{\Delta \kappa \mathcal{E}_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) \\ \frac{\Delta}{\Omega} \sin \Omega t & \cos \Omega t & \frac{\kappa \mathcal{E}_0}{\Omega} \sin \Omega t \\ -\frac{\Delta \kappa \mathcal{E}_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) & -\frac{\kappa \mathcal{E}_0}{\Omega} \sin \Omega t & \frac{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2 \cos \Omega t}{\Omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Здесь Ω — обобщенная частота Раби, определенная формулой (3.12). Можно прямо показать, что соотношение (3.15) описывает вращение, проверив, что длины начального и конечного векторов одинаковы: $u^2 + v^2 + w^2 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$. Целесообразно привести явное выражение для инверсии:

$$\begin{aligned} w(t; \Delta) = & -u_0 \frac{\Delta \kappa \mathcal{E}_0}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} [1 - \cos \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} t] - \\ & - v_0 \frac{\kappa \mathcal{E}_0}{\sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2}} \sin \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} t + \\ & + w_0 \frac{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2 \cos \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} t}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Естественно, что в пределе нулевой расстройки $\Delta \rightarrow 0$ (3.16) переходит в найденное ранее выражение (3.2):

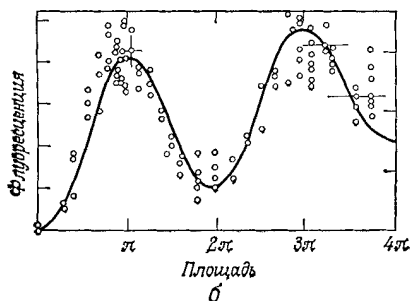
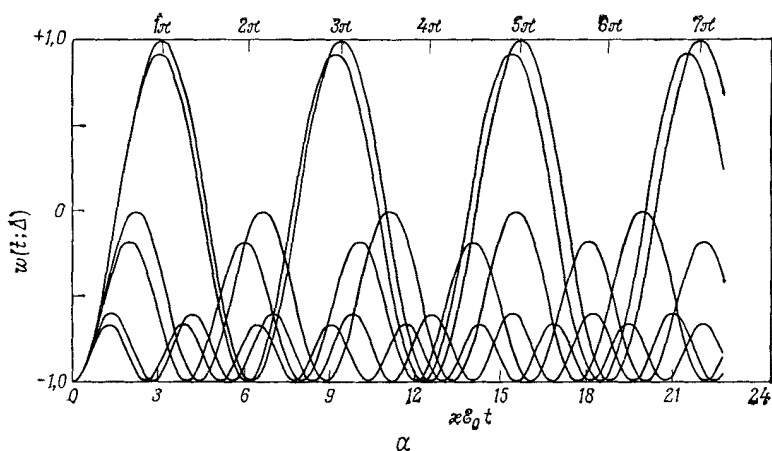
$$w(t; 0) = w_0 \cos(\kappa \mathcal{E}_0) t - v_0 \sin(\kappa \mathcal{E}_0) t. \quad (3.17)$$

Обычно инверсию (3.16) конкретизируют для случая атома, который первоначально находился в основном состоянии с $u_0 = v_0 = 0$ и $w_0 = -1$:

$$w(t; \Delta) = -1 + \frac{2(\kappa \mathcal{E}_0)^2}{(\kappa \mathcal{E}_0)^2 + \Delta^2} \sin^2 \sqrt{(\kappa \mathcal{E}_0)^2 + \Delta^2} \frac{t}{2}. \quad (3.18)$$

Поведение инверсии при фиксированном $\kappa \mathcal{E}_0$ для нескольких значений Δ изображено на фиг. 3.4. Заметим, что если система достаточно близка к точному резонансу, так что $\Delta < \kappa \mathcal{E}_0$, то размах колебаний инверсии оказывается существенным¹⁾.

¹⁾ Из формулы (3.18) особенно ясен физический смысл частоты Раби $\Omega(\Delta)$ [см. уравнение (3.12)]: инверсия w осциллирует во времени, и $\Omega(\Delta)$ есть частота этих осцилляций. — *Прим. ред.*



Фиг. 3.4. а — решение Раби для инверсии как функции времени при различных расстройках.

Наиболее высокая кривая отвечает точному резонансу; кривая, лежащая чуть ниже, — расстройке $\Delta = -0,2\kappa\zeta_0$ ($\kappa\zeta_0$ — резонансная частота Раби). Промежуточная пара кривых соответствует расстройкам $\kappa\zeta_0$ и $1,2\kappa\zeta_0$. Наконец, для нижней пары кривых $\Delta \approx 2,0\kappa\zeta_0$ и $\Delta = 2,2\kappa\zeta_0$. Видно, что изменение расстройки на $0,2\kappa\zeta_0$ сильнее сказывается при больших Δ . Так, при $\kappa\zeta_0 t = 5\pi$ кривые нижней пары полностью расфазированы, в то время как кривые верхней пары сдвинуты лишь незначительно. При большом неоднородном уширении ($1/T_2^* \gg \kappa\zeta_0$) число атомов, достигающих полной инверсии или осгающихся в фазе друг с другом, относительно невелико. Атомы, находящиеся в точном резонансе, достигают полной инверсии, если площади возбуждающих импульсов равны нечетному числу π , т. е. $\kappa\zeta_0 t = \pi, 3\pi, 5\pi$ и т. д.

б — степень инверсии в системе атомов, совершающих осцилляции Раби, определенная по их флуоресценции.

Воспроизведен пример подобного рода, заимствованный из работы Гиббса [14], в котором интенсивность флуоресценции и, следовательно, инверсия сильно зависят от площади входного импульса.

§ 4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ЗАТУХАНИЯ

При обсуждении классических проблем, связанных с резонансными взаимодействиями импульса, важную роль играли различные времена релаксации диполя. Их целесообразно вводить и при квантовомеханическом рассмотрении. Это можно сделать почти тем же способом. В отсутствие возбуждающего поля колебания диполя должны затухать. Чтобы отразить это, можно следующим несложным образом модифицировать уравнения для средних значений во вращающейся системе координат:

$$\dot{u} = -\Delta v - \frac{u}{T_2'}, \quad (3.19a)$$

$$\dot{v} = \Delta u - \frac{v}{T_2'} + \kappa \mathcal{E} w, \quad (3.19б)$$

$$\dot{w} = -\frac{w - w_{\text{равн}}}{T_1} - \kappa \mathcal{E} v. \quad (3.19в)$$

Это оптические аналоги полуфеноменологических уравнений, первые предложенных Блохом [2] для ядерных спинов.

В § 4 гл. 2 уже отмечалось одно различие между уравнениями (3.19) и соответствующими классическими уравнениями (1.18), (1.19)—дополнительная переменная w , имеющая смысл инверсии. Вследствие релаксационных взаимодействий (столкновения в газе, рассеяние фононов в твердом теле и др.), которые возмущают дипольные осцилляции резонансного атома без изменения его энергии, инверсия w может затухать со скоростью, отличной от скорости затухания переменных u и v . Это обстоятельство, следуя Блоху, обычно учитывают, приписывая инверсии время затухания T_1 , которое отлично от времени затухания T_2' для дипольного момента. Кроме того, наличие некогерентной накачки, обусловленной контактом с тепловым резервуаром при конечной температуре, широкополосной лампой-вспышкой, электронным разрядом или другими источниками, может поддерживать определенный уровень инверсии даже в отсутствие резонансного поля $\mathcal{E}$. Это учтено введением в уравнение (3.19в) равновесной величины $w_{\text{равн}}$, к которой релаксирует инверсия при $\mathcal{E} = 0$.

В теории магнитного резонанса времена T_1 и T_2' называют соответственно продольным и поперечным однородными временами жизни, поскольку они определяют затухание компонент магнитного спина, параллельных и перпендикулярных статическому зеемановскому магнитному полю (его обычно считают ориентированным вдоль оси z). Штрихованное время T_2' есть

поперечное время жизни дипольного момента, связанное с некогерентными взаимодействиями, которые однородно воздействуют на все атомы. Сюда относятся столкновения, радиационное затухание, «спиновый» обмен и т. п. Время T'_2 следует отличать от времени жизни, обусловленного неоднородными эффектами, которое обозначим символом T_2^* . Обычным механизмом возникновения неоднородного времени жизни T_2^* в газах является эффект Доплера, который определяет для каждого атома индивидуальную эффективную резонансную частоту, зависящую от его скорости. В твердых телах неоднородное уширение связано со случайными полями локальных напряжений. Результирующее случайное распределение резонансных частот и обусловленная этим расфазировка моментов отдельных диполей в макроскопическом ансамбле атомов приводят к затуханию макроскопической поляризации (как и в случае классических осцилляторов) даже в отсутствие однородного затухания T_2 -типа. Выражение

$$\frac{1}{T_2} \equiv \frac{1}{T_2'} + \frac{1}{T_2^*} \quad (3.20)$$

определяет полное поперечное время затухания T_2 . Его классический аналог обозначался в гл. 1 через $\mathcal{T}$.

Добавление в уравнения Блоха членов, описывающих затухание, делает эти уравнения значительно более сложными, но в то же время и более реалистичными. В случае стационарного поля ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$) они остаются линейными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами и допускают точное решение.

§ 5. РЕШЕНИЯ ТОРРИ

Решение уравнений (3.19) для случая стационарного поля было найдено в 1949 г. Торри [3] с использованием преобразований Лапласа. Оно имеет следующий вид:

$$\Gamma(t) = Ae^{-at} + \left(B \cos st + \frac{C}{s} \sin st \right) e^{-bt} + D, \quad (3.21)$$

где Γ означает u , v или w . Разным компонентам отвечают различные постоянные коэффициенты A , B , C , D , в то время как постоянные a , b и s , зависят только от Δ , $\mathcal{E}_0$, T_1 и T'_2 . Ясно, что незатухающие решения (3.15) содержатся в (3.21) как частный случай при $a = b = 0$ и $A + D = 0$. Устанавливающееся при больших временах для каждой переменной стационарное

решение D можно найти, полагая $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$ и решая соответствующие алгебраические уравнения. В результате получим

$$u(\infty; \Delta) = -w_{\text{равн}} \frac{(\Delta T_2')(\kappa \mathcal{E}_0 T_2')}{1 + (\Delta T_2')^2 + T_1 T_2' (\kappa \mathcal{E}_0)^2}, \quad (3.22a)$$

$$v(\infty; \Delta) = w_{\text{равн}} \frac{\kappa \mathcal{E}_0 T_2'}{1 + (\Delta T_2')^2 + T_1 T_2' (\kappa \mathcal{E}_0)^2}, \quad (3.22б)$$

$$w(\infty; \Delta) = w_{\text{равн}} \frac{1 + (\Delta T_2')^2}{1 + (\Delta T_2')^2 + T_1 T_2' (\kappa \mathcal{E}_0)^2}. \quad (3.22в)$$

Отметим, что даже при очень больших временах релаксации T_1 и T_2' , когда говорить об установившихся решениях уже не имеет смысла, сохраняется тем не менее некоторая связь выражений (3.22) с незатухающими решениями (3.15). Именно при $T_1 = T_2' = \infty$ и в отсутствие некогерентной накачки (т. е. при $w_{\text{равн}} = -1$) выражения (3.22) совпадают с не зависящими от времени частями решений (3.15), если $w_0 = -1$ и $u_0 = v_0 = 0$.

Установим далее некоторые характерные свойства решений Торри, найдем, в частности, секулярное уравнение, определяющее величины a , b и s . Использование тождества

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' \dot{x}(t'), \quad (3.23)$$

где $x_0 \equiv x(0)$, естественным образом приводит к преобразованию Лапласа. Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda[x]$ преобразование Лапласа от $x(t)$ с параметром λ :

$$\mathcal{L}_\lambda[x] \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(t) dt.$$

Подставляя сюда вместо $x(t)$ выражение (3.23) и пользуясь тем, что $\mathcal{L}_\lambda[1] = 1/\lambda$, находим

$$\mathcal{L}_\lambda[x] = \frac{1}{\lambda} x_0 + \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \int_0^t dt' \dot{x}(t').$$

Меняя порядок интегрирований по t и t' , преобразуем второе слагаемое к виду

$$\int_0^\infty dt' \dot{x}(t') \int_{t'}^\infty dt e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty dt' e^{-\lambda t'} \dot{x}(t'),$$

что есть в точности $(1/\lambda)\mathcal{L}_\lambda[\dot{x}]$. Итак, исходное тождество (3.23) эквивалентно следующему соотношению для преобразования Лапласа:

$$\lambda\mathcal{L}_\lambda[x] = x_0 + \mathcal{L}_\lambda[\dot{x}]. \quad (3.24)$$

Если, как в случае уравнений Блоха, речь идет о решении дифференциальных уравнений первого порядка, то тождество (3.24) позволяет свести задачу к алгебраической путем перехода к преобразованию Лапласа.

Подставляя в (3.24) вместо x поочередно u , v и w и выражая $\dot{u}$, $\dot{v}$ и $\dot{w}$ с помощью (3.19), приходим к трем алгебраическим уравнениям:

$$\lambda\mathcal{L}_\lambda[u] = u_0 - \frac{1}{T_2'} \mathcal{L}_\lambda[u] - \Delta\mathcal{L}_\lambda[v], \quad (3.25a)$$

$$\lambda\mathcal{L}_\lambda[v] = v_0 - \frac{1}{T_2'} \mathcal{L}_\lambda[v] + \Delta\mathcal{L}_\lambda[u] + \kappa\mathcal{E}_0\mathcal{L}_\lambda[w], \quad (3.25б)$$

$$\lambda\mathcal{L}_\lambda[w] = w_0 - \frac{1}{T_1} \mathcal{L}_\lambda[w] + \frac{1}{T_1} \frac{w_{\text{равн}}}{\lambda} - \kappa\mathcal{E}_0\mathcal{L}_\lambda[v]. \quad (3.25в)$$

Приравнявая нулю определитель системы уравнений (3.25), получаем секулярное уравнение, корни которого являются собственными частотами задачи и определяют кинетические постоянные Торри a , b и s .

Секулярное уравнение имеет следующий вид:

$$\left(\lambda + \frac{1}{T_2'}\right) \left[\left(\lambda + \frac{1}{T_2'}\right) \left(\lambda + \frac{1}{T_1}\right) + (\kappa\mathcal{E}_0)^2 \right] + \Delta^2 \left(\lambda + \frac{1}{T_1}\right) = 0. \quad (3.26)$$

В общем случае разложение на множители здесь невозможно и приходится решать кубическое уравнение.

Однако ситуация упрощается в следующих трех случаях, проанализированных Торри:

1. *Сильное влияние столкновений.* Если столкновения вызывают одновременно и сбой фазы диполей, и затухание энергии, то следует положить $T_1' = T_2'$. При этом корни уравнения (3.26) таковы:

$$\lambda = -\frac{1}{T_2'}, \quad -\frac{1}{T_2'} \pm i\sqrt{\Delta^2 + (\kappa\mathcal{E}_0)^2}.$$

В результате для величин a , b и s , фигурирующих в (3.21), пользуясь известными свойствами преобразования Лапласа, получаем

$$a = b = \frac{1}{T_2'},$$

$$s = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa\mathcal{E}_0)^2}.$$

Этот случай детально исследовался также Джейнсом [4], который использовал метод двумерных матриц, сильно упрощающий расчеты.

2. *Точный резонанс.* Если расстройка $\Delta = 0$, то кубическое уравнение (3.26) имеет следующие корни:

$$\lambda = -\frac{1}{T'_2}, \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T'_2} \right) \pm i \sqrt{(\kappa \mathcal{E}_0)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T'_2} \right)^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$a = \frac{1}{T'_2}, \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T'_2} \right)$$

и

$$s = \sqrt{(\kappa \mathcal{E}_0)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T'_2} \right)^2}.$$

3. *Сильное внешнее поле.* Если внешнее поле достаточно сильное, так что $\kappa \mathcal{E}_0 T'_2 \gg 1$, то выполняется также неравенство $\kappa \mathcal{E}_0 T_1 \gg 1$ ¹⁾ и *a fortiori* справедливо условие $\kappa \mathcal{E}_0 \gg (1/T'_2 - 1/T_1)$. Обозначив временно через γ разность поперечной и продольной скоростей затухания,

$$\gamma \equiv \frac{1}{T'_2} - \frac{1}{T_1},$$

перепишем секулярное уравнение (3.26), введя в него T'_2 и γ :

$$\left(\lambda + \frac{1}{T'_2} \right) \left[\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2 + \left(\lambda + \frac{1}{T'_2} \right)^2 - \gamma \left(\lambda + \frac{1}{T'_2} \right) \right] = \gamma \Delta^2. \quad (3.27)$$

Если $\kappa \mathcal{E}_0$ очень велико по сравнению с γ , то (3.27) имеет корни двух видов. Корень первого вида получим, предположив, что величина $(\lambda + 1/T'_2)^2$ мала по сравнению с $\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2$; при этом уравнение (3.27) естественно преобразовать к виду

$$\lambda + \frac{1}{T'_2} = \frac{\gamma \Delta^2}{[\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2] \left[1 + \frac{(\lambda + 1/T'_2)[\lambda + (1/T'_2) - \gamma]}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} \right]} \quad (3.28)$$

для решения методом итераций. Соответствующий корень есть

$$\lambda \approx -\frac{1}{T'_2} + \gamma \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} + O \left[\left(\frac{\gamma}{\kappa \mathcal{E}_0} \right)^3 \right].$$

Корни второго вида отвечают ситуации, когда величина $(\lambda + 1/T'_2)^2$ порядка $\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2$, но противоположного знака,

¹⁾ Обычно $T_1 > T'_2$. — Прим. ред.

так что квадратная скобка в (3.27) мала и порядка γ . Тогда естественно другое преобразование:

$$\left(\lambda + \frac{1}{T'_2}\right)^2 + \Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2 = \gamma \left(\lambda + \frac{1}{T'_2}\right) \left[1 + \frac{\Delta^2}{(\lambda + 1/T'_2)^2}\right].$$

С точностью до членов первого порядка по γ величину $(\lambda + 1/T'_2)^2$ в правой части можно заменить на $-\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2$. Это приводит к простому, квадратному уравнению относительно $\lambda + 1/T'_2$, решение которого дает второй и третий корень:

$$\lambda = -\frac{1}{T'_2} + \frac{1/2\gamma (\kappa \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} \pm i \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} + O\left[\left(\frac{\gamma}{\kappa \mathcal{E}_0}\right)^2\right].$$

Итак, в случае сильного когерентного поля, удовлетворяющего условию

$$\kappa \mathcal{E}_0 \gg \gamma = \frac{1}{T'_2} - \frac{1}{T_1},$$

получаем следующие кинетические коэффициенты для решения Торри (3.21):

$$a = \frac{1}{T'_2} - \left(\frac{1}{T'_2} - \frac{1}{T_1}\right) \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} + O\left[\left(\frac{\gamma}{\kappa \mathcal{E}_0}\right)^3\right], \quad (3.29a)$$

$$b = \frac{1}{T'_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T'_2} - \frac{1}{T_1}\right) \frac{(\kappa \mathcal{E}_0)^2}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} + O\left[\left(\frac{\gamma}{\kappa \mathcal{E}_0}\right)^3\right], \quad (3.29б)$$

$$s = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2} + O\left[\left(\frac{\gamma}{\kappa \mathcal{E}_0}\right)^2\right]. \quad (3.29в)$$

Представляет интерес перейти здесь к двум предельным ситуациям, рассмотренным ранее. В пределе сильного влияния столкновений $\gamma \equiv 0$, и первые слагаемые выражений для a , b и s точно совпадают с корнями, найденными в случае 1. Далее, при точном резонансе, когда $\Delta = 0$, корни для сильного поля представляют собой начальные члены в разложениях соответствующих точных выражений, найденных в случае 2, по степеням γ .

Торри получил также явные выражения для коэффициентов A , B и C , фигурирующих в (3.21). Однако они являются весьма сложными функциями параметров Δ , $\kappa \mathcal{E}_0$, T_1 , T'_2 и $\omega_{\text{равн}}$, и мы их не будем здесь выписывать. Вместо того чтобы далее исследовать точные решения уравнений Блоха с затуханием, перейдем теперь к обсуждению результатов наблюдения ряда когерентных нестационарных эффектов, существование которых вытекает из решения (3.21).

§ 6. ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ

Даже в отсутствие затухания движение псевдоспина s под влиянием вращающего момента $\Omega^0 + \Omega^+$ оказывается весьма сложным. [Это ясно из решения Раби (3.15) для вектора Блоха $\rho = (u, v, w)$, эквивалентного во вращающейся системе координат вектору s] Однако вблизи резонанса вектор ρ совершает движение, которое относительно легко представить наглядно. В пределе $\Delta \rightarrow 0$ решение (3.15) переходит в (3.2), откуда видно, что резонансные векторы ρ просто движутся вверх-вниз в плоскости 2—3 с частотой $\omega \mathcal{E}_0$. В исходной, невращающейся системе координат этому соответствует быстрая прецессия вектора s с частотой ω вокруг оси 3, на которую накладывается гораздо более медленное движение вверх-вниз. В механике вращающихся волчков медленное движение прецессирующего вектора вверх-вниз называется нутацией.

Спиновая нутация уже давно наблюдалась в магнитном резонансе. Поскольку движение вверх-вниз в каждом периоде нутации частично выводит спин из основного состояния, его поглощательная способность то ослабляется, то восстанавливается с частотой $\omega \mathcal{E}_0$. Танг и Статц [5] первыми указали, что этот эффект должен проявляться и в случае оптических импульсов. Они рассуждали следующим образом. Ступенчатый световой импульс, распространяющийся в усиливающей среде, создает осцилляторную модуляцию интенсивности на своем переднем фронте, причем закон затухания соответствующей синусоиды доставляет информацию о процессах релаксации. Для наблюдения эффекта необходимо прежде всего, чтобы частота ожидаемых осцилляций, т. е. частота Раби, была порядка или больше ширины линии перехода.

Чтобы понять физический смысл происходящих при этом процессов, представим себе мощный когерентный световой импульс, который переводит резонансные атомы последовательно из нижнего состояния в когерентное суперпозиционное состояние, затем в верхнее состояние, далее обратно в когерентное суперпозиционное состояние с его большим электрическим дипольным моментом, наконец, вновь в нижнее состояние и т. д. Цикл повторяется, но из-за релаксационных процессов в среде затухает. Осцилляции разности населенностей, вызванные полем, в свою очередь воздействуют на него, что приводит к амплитудной модуляции поля. Нерезонансные атомы фактически не достигают верхнего состояния, но в остальном ведут себя аналогично. Именно такое поведение атомов обсуждалось в § 3 данной главы и было показано на фиг. 3.4. Частота наблюдаемой модуляции есть обобщенная частота Раби, определяемая

формулой (3.12):

$$\Omega(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa\mathcal{E})^2}. \quad (3.30)$$

Конечно, необходимо по меньшей мере $\Omega(\Delta) > 1/T'_2$, с тем чтобы произошло хотя бы несколько осцилляций, прежде чем данный эффект затухнет. Отсюда легко оценить минимально необходимую величину поля. Кроме того, для наблюдения эффекта длительность импульса должна быть равна хотя бы нескольким периодам $1/\kappa\mathcal{E}_0$ (т. е. площадь импульса должна во много раз превышать π).

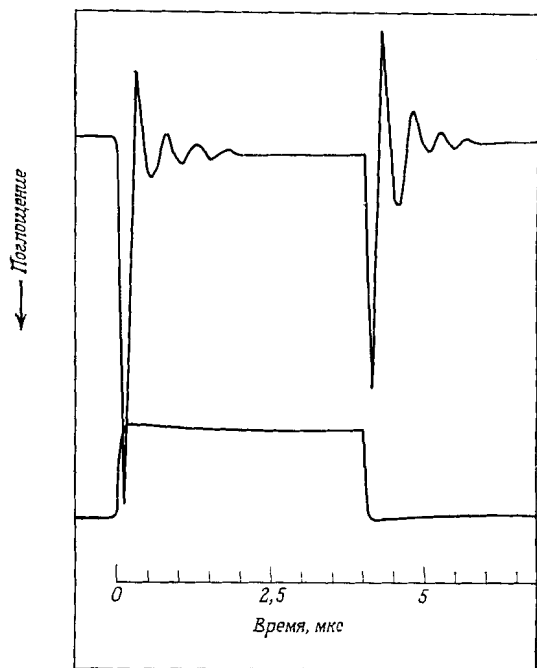
Хоккер и Танг [6] наблюдали оптическую нутацию¹⁾, используя полосу поглощения в газообразном SF_6 и импульс от CO_2 -лазера с длиной волны 10,6 мкм. Амплитудная модуляция наблюдалась на переднем фронте импульса при достаточно высоком давлении газа SF_6 . Хотя модуляция не была синусоидальной, необходимый уровень мощности, составлявший около 200 Вт/см², приблизительно согласовывался с теоретической величиной 160 Вт/см². Позже Бруэ и Шумейкер [7], используя непрерывное излучение CO_2 -лазера, а также импульсный сдвиг Штарка для молекулярных переходов в $\text{C}^{13}\text{H}_3\text{F}$ и NH_2D , наблюдали различные нестационарные когерентные процессы, и в том числе оптическую нутацию.

Методика экспериментов Бруэ и Шумейкера относительно проста. Она применима для наблюдения широкого круга нестационарных процессов при оптическом резонансе, и потому целесообразно обсудить ее детальнее. Эксперимент обычно состоит из трех этапов. На первом этапе непрерывный лазер с очень узкой спектральной линией вызывает насыщение небольшой части неоднородно уширенной атомной линии поглощения. (Явление насыщения будет подробно обсуждаться в гл. 6.) На втором этапе скачкообразно включается постоянное электрическое поле, вызывающее штарковский сдвиг и (или) расщепление резонансной линии. Третий этап состоит в регистрации излучения, испускаемого насыщенным поглотителем со штарковским смещением. Обычно это осуществляется путем наблюдения биений при его смещении с излучением того же узкополосного, непрерывного лазера, который остается включенным на протяжении всего эксперимента.

В любом эксперименте такого типа можно выделить две различные группы молекул, которые играют главную роль. Моле-

¹⁾ Можно сказать, что оптическая нутация есть наложение колебаний инверсии с частотой Раби $\Omega(\Delta)$ (3.12) на высокочастотные колебания с частотой внешнего поля ω , т. е. модуляция наведенных полей величин (например, атомного дипольного момента) колебаниями инверсии. Хорошее изложение физических аспектов проблемы оптической нутации содержится, например, в обзоре Ораевского [15*]. — *Прим. ред.*

кулы одной группы первоначально находятся в резонансе и насыщаются лазерным излучением, а затем выводятся из резонанса штарковским полем. Молекулы другой группы, которые первоначально далеки от резонанса и потому не возбуждаются, оказываются в резонансе после штарковского сдвига. Для них дело обстоит так, как если бы включение штарковского поля происходило одновременно с включением лазерного излучения.



Фиг. 3.5. Затухающие колебания оптической нутации, которые наблюдались Бруэ и Шумейкером [7] при включении и выключении штарковского поля.

Эти молекулы начинают, следовательно, поглощать лазерное излучение, а их векторы Блоха начинают вращаться в соответствии с решением Раби (3.15), в котором $u_0 = v_0 = 0$ и $\omega_0 = -1$, поскольку в исходный момент они находились в основном состоянии. Другими словами, векторы Блоха начинают совершать нутацию, которая приводит к модуляции распространяющегося лазерного пучка, как показано на фиг. 3.5. После выключения штарковского поля лазерный пучок остается промодулированным — теперь уже вследствие нутации молекул первой группы, для которых скачкообразно восстанавливается резонанс. Конечно, модуляция, связанная с нутацией, затухает

в обоих случаях, так как однородные времена жизни T_1 и T'_2 ограничивают длительность нутации. Это ясно видно из формулы (3.21). Заключение в скобки осциллирующий член затухает со скоростью $b \neq 0$.

§ 7. ЗАТУХАНИЕ СВОБОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Интересна эволюция молекул первой группы после включения штарковского поля. Первоначально они были возбуждены полем непрерывного лазера. С помощью (3.22в) найдем инверсию после длительного воздействия лазера. Если $T_1 = T'_2$ и $\omega_{\text{равн}} = -1$, то инверсия такова:

$$\omega(t \gg T'_2; \Lambda) = - \frac{\Delta^2 + (1/T'_2)^2}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E}_0)^2 + (1/T'_2)^2}. \quad (3.31)$$

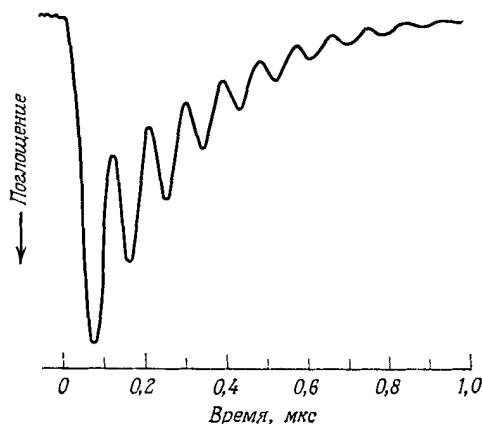
Она может существенно отличаться от -1 , принимая значения, практически равные нулю (фиг. 6.3). Если $\Delta = 0$ и стационарное лазерное поле $\mathcal{E}_0$ сильное, то $\kappa \mathcal{E}_0$ достаточно велико по сравнению с $1/T'_2$.

Если эти молекулы отведены штарковским полем достаточно далеко от резонанса, то они начинают свободно излучать внутри полосы частот с центром при $\omega + \delta\omega_s$, где ω — лазерная частота, а $\delta\omega_s$ — штарковский сдвиг. Ширина полосы излучения будет той же, что и первоначально созданная лазером ширина области возбуждения, которая гораздо меньше $1/T'_2$ и $[(\kappa \mathcal{E}_0)^2 + (1/T'_2)^2]^{1/2}$. Если, как в экспериментах Бруэ — Шумейкера, линия поглощения обладает в основном доплеровским уширением и $\kappa \mathcal{E}_0 \gg 1/T'_2$, так что возможна нутация, то возбужденная ширина полосы приблизительно равна $\kappa \mathcal{E}_0$. Следовательно, длительность сигнала, испускаемого ранее возбужденными молекулами, не будет превышать $1/\kappa \mathcal{E}_0$, так как по истечении этого времени молекулярные диполи внутри полосы $\kappa \mathcal{E}_0$ будут полностью расфазированы и излучение практически прекратится. Такое затухание свободного излучения, обусловленное расфазировкой диполей, как уже отмечалось в гл. 1, называют затуханием свободной поляризации.

Бруэ и Шумейкер наблюдали этот эффект в газе NH_2D . Были обнаружены биения между лазерным и молекулярным излучением с частотой $\delta\omega_s$, изображенные на фиг. 3.6. Отметим, что биения затухают приблизительно за то же время, что и полный сигнал. Это согласуется с данным выше объяснением, поскольку затухание полного сигнала связано с модуляцией за счет нутации молекул второй группы, которая также происходит с частотой $\kappa \mathcal{E}_0$. Затухание самих биений представляет собой проявление затухания свободной поляризации, которое наблюдалось го-

раздо ранее при излучении магнитного резонанса [8]. И там и здесь причина ее состоит в расфазировке группы свободно прецессирующих диполей. Эта расфазировка происходит быстрее, чем затухания T_1 - и T_2' -типа. В этом смысле затухание свободной поляризации происходит аномально быстро.

Наконец, отметим, что наличие магнитных аналогий для оптической нутации и для затухания свободной поляризации отнюдь не случайно. Нестационарные когерентные оптические про-



Фиг. 3.6. Затухание оптической свободной поляризации в газе NH_2D на длине волны 10,6 мкм при скачкообразном включении штарковского поля. (Из работы Бруэ и Шумейкера [7].)

цессы вполне аналогичны соответствующим магнитным процессам, поскольку те и другие описываются одинаковыми уравнениями Блоха. Поэтому решения проблемы Раби, полученные Торри [3] и использованные нами в предыдущем параграфе, оказываются адекватными и для оптического резонанса двухуровневых атомов в стационарных насыщающих лазерных полях. Нужно, однако, иметь в виду, что оптический резонанс перестает быть высокочастотной копией магнитного резонанса, когда становятся существенными эффекты *распространения* волн, которые изучаются в следующей главе.

§ 8. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ

Мы уже отмсчали, что введение затухания в уравнения Блоха усложняет их, но одновременно и делает их более реалистичными. В § 5 обсуждались точные решения Торри для случая стационарной огибающей поля. При некоторых условиях можно

отказаться от ограничения, связанного с постоянством амплитуды $\mathcal{E}$, и найти приближенные решения для уравнений Блоха с затуханием. Эти решения пригодны, если $\mathcal{E}$ изменяется достаточно медленно, в известном смысле «адиабатически». Термин «адиабатическое прохождение» можно использовать для описания совокупности соответствующих экспериментальных явлений [9].

Хотя для задачи об адиабатическом прохождении существуют аналитические решения, поучительно использовать сначала векторную модель для оптических уравнений Блоха в отсутствие затухания; это поможет уяснить физику рассматриваемых явлений. Уже отмечалось, что при отсутствии потерь оптические уравнения Блоха можно записать в виде одного векторного уравнения [см. (3.5)]:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{p}. \quad (3.32)$$

Здесь $\mathbf{p}$ — вектор Блоха:

$$\mathbf{p} = (u, v, w), \quad (3.33a)$$

а вращающий момент $\mathbf{\Omega}$ имеет компоненты

$$\mathbf{\Omega}(t) = (-\kappa \mathcal{E}(t), 0, \Delta). \quad (3.33b)$$

Уравнение прецессии допускает следующую интерпретацию: вектор $\mathbf{p}$ прецессирует вокруг вектора вращающего момента с частотой прецессии $\Omega(\Delta, t) = |\mathbf{\Omega}|$:

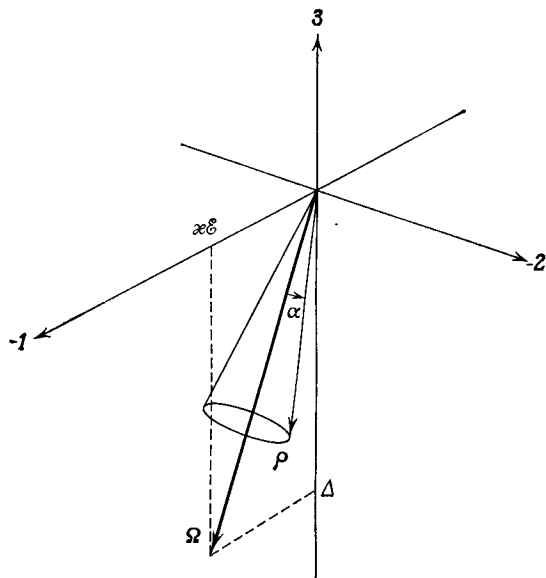
$$\Omega(\Delta, t) = \sqrt{(\kappa \mathcal{E}(t))^2 + \Delta^2}, \quad (3.34)$$

как показано на фиг. 3.7, где для определенности расстройка $\Delta = \omega_0 - \omega$ выбрана отрицательной. Если расстройка $|\Delta|$ достаточно велика, скажем порядка нескольких неоднородных ширин линии $1/T_2^*$, то в хорошем приближении можно считать, что $\Omega(\Delta)$ существенно превышает скорость изменения амплитуды $\mathcal{E}$. Так, например, для газов при комнатной температуре время T_2^* порядка 0,1 нс, поэтому только в случае пикосекундных импульсов мы будем иметь дело с когерентными полями, амплитуды которых изменяются за времена порядка $(1/2 \div 1/10) \cdot T_2^*$. Конечно, для того чтобы движение вектора $\mathbf{p}$ в приложенном поле $\mathcal{E}(t)$ было когерентной прецессией, длительность полевого воздействия τ должна быть малой по сравнению с временами релаксации T_1 и T_2' , которые опущены в уравнении (3.32). В связи с этим наложим следующие условия на временные параметры задачи:

$$|\Delta|^{-1} < T_2^* < \tau < T_2', T_1. \quad (3.35)$$

Считая импульс плавным, мы приближенно определяем τ согласно выражению $\mathcal{E}/\tau \sim d\mathcal{E}/dt$.

При выполнении этих условий вектор вращающего момента $\Omega(t)$ очень медленно изменяет свое направление по сравнению со скоростью $|\Omega|$ прецессии вектора ρ вокруг Ω . Можно сказать, что при этом вектор Блоха будет адиабатически следовать за $\Omega(t)$. Если до прихода импульса резонансные атомы находились



Фиг. 3.7. Прецессия вектора Блоха ρ в узком конусе около вектора вращающего момента Ω во вращающейся системе координат.

в своих основных состояниях, то вектор ρ для них будет направлен вниз, в отрицательном направлении оси 3. Поскольку расстройка $|\Delta|$ по предположению велика, то первоначально вектор Ω также почти вертикален. Итак, в хорошем приближении можно считать, что прецессирующий вектор Блоха остается приблизительно параллельным вращающему моменту Ω , когда Ω движется адиабатически. Малость угла α на фиг. 3.7 позволяет провести простой геометрический расчет компонент вектора Блоха. В пределе $\alpha = 0$ легко находим

$$u = \frac{-\kappa\mathcal{E}}{\sqrt{(\kappa\mathcal{E})^2 + \Delta^2}}, \quad (3.36a)$$

$$v = 0, \quad (3.36б)$$

$$w = \frac{\Delta}{\sqrt{(\kappa\mathcal{E})^2 + \Delta^2}}. \quad (3.36в)$$

Конечно, вектор ρ не может быть в точности параллелен вектору Ω [хотя это вытекает из уравнений (3.36)], поскольку тогда $\Omega \times \rho = 0$ и тождественно обращается в нуль производная $d\rho/dt$. Основной недостаток чисто геометрической картины адиабатического прохождения состоит в трудности получения конечных поправок порядка α к решению (3.36б).

Первым примером адиабатического прохождения, который был изучен экспериментально, явилась адиабатическая инверсия, хорошо известная из магнитного резонанса [10]. Трисн [11] обратил внимание на то, что если адиабатически изменять расстройку $\Delta = \omega_0 - \omega$ от большой отрицательной величины (скажем, от $\omega \approx \omega_0 + 10/T_2^*$) до большой положительной величины (например, до $\omega \approx \omega_0 - 10/T_2^*$), то инверсия w должна изменяться адиабатически от $w \approx -1$ до $w \approx +1$. Иначе говоря, населенность основного состояния можно было бы адиабатически инвертировать. Расстройка Δ меняется во времени, если частота поля ω или атомная частота ω_0 зависит от времени. Недавно Лоу наглядно продемонстрировал оптическую адиабатическую инверсию [12], используя метод Бруэ — Шумейкера для модуляции частоты ω_0 в парах NH_3 .

Более обстоятельный и систематический анализ адиабатического прохождения¹⁾ провел Крисп [13]. Исходя из уравнений Блоха (3.19) с феноменологическими членами затухания, Крисп объединил уравнения для u и v подобно тому, как это было сделано в классическом анализе § 7 гл. 1. При этом уравнения Блоха принимают вид

$$\frac{d}{dt}(u - iv) = -\left(\frac{1}{T_2} + i\Delta\right)(u - iv) - i\kappa \mathcal{E} w, \quad (3.37a)$$

$$\frac{d}{dt} w = -\frac{1}{T_1} (w - w_{\text{равн}}) - \kappa \mathcal{E} v. \quad (3.37b)$$

Уравнение (3.37a) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка для комплексной дипольной амплитуды $u - iv$, и его можно проинтегрировать точно:

$$u(t) - iv(t) = \int_{-\infty}^t [-i\kappa \mathcal{E}(t')] w(t') e^{-[1/T_2' + i\Delta](t-t')} dt'. \quad (3.38)$$

Здесь мы предположили, что при $t \rightarrow -\infty$ все атомы находились в основных состояниях, т. е. $w(-\infty) = -1$, а две другие ком-

¹⁾ Термин «адиабатическое прохождение», заимствованный из теории магнитного резонанса [10], обусловлен тем, что первичным для данного явления служит достаточно медленное прохождение расстройки Δ через резонанс — Прим ред.

поненты равнялись нулю: $u(-\infty) = 0$ и $v(-\infty) = 0$. Замена переменной $s \equiv t - t'$ в (3.38) позволяет упростить решение:

$$u(t) - iv(t) = \int_0^{\infty} [i\kappa \mathcal{E}(t-s)] w(t-s) e^{-[i/T_2' + i\Delta]s} ds. \quad (3.39)$$

Далее используется предположение об адиабатическом прохождении, согласно которому огибающая $\mathcal{E}(t)$ и компоненты вектора Блоха изменяются медленно за времена порядка Δ^{-1} . Разлагая в ряд Тейлора функцию $\kappa \mathcal{E}(t-s) w(t-s)$:

$$\kappa \mathcal{E}(t-s) w(t-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} [\kappa \mathcal{E}(t) w(t)],$$

Крисп [13] получил следующее выражение для интеграла (3.39):

$$u(t) - iv(t) = \frac{-i}{(1/T_2') + i\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(1/T_2') + i\Delta]^n} \frac{d^n}{dt^n} [\kappa \mathcal{E}(t) w(t)]. \quad (3.40)$$

Хотя решение (3.40) найдено только в виде бесконечного ряда, можно думать, что оно окажется весьма полезным. Действительно, если приближение адиабатического прохождения законно, то величина $\kappa \mathcal{E}(t) w(t)$ очень слабо изменяется за времена порядка $|(1/T_2') + i\Delta|^{-1}$ и ряд сходится быстро.

В предположении быстрой сходимости адекватное решение для $u(t)$ и $v(t)$ имеет вид

$$u(t) - iv(t) = \frac{-i}{(1/T_2') + i\Delta} \left\{ \kappa \mathcal{E}(t) w(t) - \frac{1}{(1/T_2') + i\Delta} \frac{d}{dt} [\kappa \mathcal{E}(t) w(t)] \right\}. \quad (3.41)$$

При большой расстройке, когда величина $|(1/T_2') + i\Delta|$ достаточно велика, можно удерживать в (3.41) только первое слагаемое. Подстановка найденного таким образом выражения для v в уравнение (3.37б) приводит, как показал Крисп, к хорошо известному скоростному уравнению для инверсии:

$$\dot{w} = -\frac{1}{T_1} (w - w_{\text{равн}}) - \frac{(\kappa \mathcal{E})^2 T_2'}{1 + \Delta T_2'} w. \quad (3.42)$$

Мы вернемся к этому уравнению в гл. 6.

Ближе к резонансу, когда в (3.41) приходится удерживать и второй член, формулы (3.36) для компонент u , v и w , используемых в векторной модели, получают в два этапа. Сначала используем уравнение (3.37б), которое с учетом неравенств адиа-

батического прохождения (3.35), позволяющих пренебречь слагаемыми, пропорциональными $1/T_1$, дает

$$\frac{d}{dt}(\kappa \mathcal{E} w) = -(\kappa \mathcal{E})^2 v + w \frac{d}{dt}(\kappa \mathcal{E}). \quad (3.43)$$

Этот результат вместе с решением (3.41) эквивалентен следующему:

$$u \cong - \left(\frac{\kappa \mathcal{E}}{\Delta} \right) w, \\ v \cong \left[\frac{d}{dt}(\kappa \mathcal{E}) \right] [\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E})^2]^{-1} w,$$

причем мы еще раз использовали неравенства (3.35), чтобы пренебречь $1/\Gamma'_2$ в сравнении с Δ . На втором шаге, используя неравенства (3.35), а также полученные выражения для u и v , заключаем, что $u \gg v$ и $u^2 + w^2 \approx 1$. Это позволяет найти w , а затем u и v :

$$u = - \frac{\kappa \mathcal{E}}{\sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E})^2}}, \quad (3.44a)$$

$$v = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E})^2}} \frac{d(\kappa \mathcal{E})/dt}{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E})^2}, \quad (3.44б)$$

$$w = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\kappa \mathcal{E})^2}}. \quad (3.44в)$$

Результирующие выражения для u и w совпадают с найденными геометрически, а результат для v является новым. Как показал Гришковский [9], выражение для v можно получить и из геометрической картины, если первое уравнение Блоха (3.19а) решить относительно v при $T'_2 \rightarrow \infty$, а затем использовать геометрический результат (3.36а) для нахождения $\dot{u}$.

Если в комплексной амплитуде диполя (3.40) необходимо учитывать члены более высокого порядка, то анализ резко усложняется, поскольку уже нельзя считать, что ρ адиабатически следует за Ω . Адиабатическое прохождение можно рассматривать как режим когерентных взаимодействий, промежуточный между классической теорией линейной дисперсии, с одной стороны, и квантовооптической нелинейной теорией — с другой. В следующей главе мы обсудим некоторые существенно неклассические эффекты, которые предсказаны для случая, когда приближение адиабатического прохождения теряет силу ввиду того, что резонанс становится слишком острым, т. е. когда ω попадает внутрь неоднородной ширины линии поглощения атомов.

Недавно возникшим интересом к режиму адиабатического прохождения мы почти целиком обязаны экспериментальным ра-

ботам Гришковского и др [9] Если читатель хочет получить представление о поставленных ими элегантных экспериментах, то он должен обратиться к статьям [9]

ЛИТЕРАТУРА

- 1 *Rabi I J*, Phys Rev, **51**, 652 (1937)
- 2 *Bloch F*, Phys Rev, **70**, 460 (1946)
- 3 *Torrey H C*, Phys Rev, **76**, 1059 (1949)
- 4 *Jaynes E T*, Phys Rev, **98**, 1099 (1955)
- 5 *Tang C L Staiz H* Appl Phys Lett, **10** 145 (1968)
- 6 *Hocker G B Tang C L*, Phys Rev Lett, **21**, 591 (1969)
- 7 *Brewer R G, Shoemaker R L*, Phys Rev Lett, **27**, 631 (1971), Phys Rev, **A6**, 2001 (1972)
- 8 *Hahn E L* Phys Rev **77**, 297 (1950)
- 9 *Grischkowsky D*, Phys Rev Lett, **24**, 866 (1970)
Grischkowsky D, Armstrong J A, Phys Rev, **A6**, 1566 (1972)
Grischkowsky D Phys Rev **A7**, 2096 (1973)
Grischkowsky D, Courtens E, Armstrong J A, Phys Rev Lett, **31**, 422 (1973)
- 10 *Abragam A*, The Principles of Nuclear Magnetism London, 1961, p 65—66 (См перевод *А Абрагам*, Ядерный магнетизм ИЛ 1963)
- 11 *Treacy E B* Phys Lett, **27A**, 421 (1968)
Treacy E B DeMaria A J, Phys Lett, **29A**, 369 (1969) (Окспериментальные результаты)
- 12 *Loy M M T* Phys Rev Lett **32**, 814 (1974).
- 13 *Crisp M D*, Phys Rev, **A8**, 2128 (1973)
- 14 *Gibbs H M* Phys Rev, **A8**, 446 (1973)
- 15* *Ораевский А Н*, УФН, **91**, 181 (1973)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Электродипольные переходы в атомах вызывают обычно излучение в оптической области спектра. Поэтому почти в каждом эксперименте с участием электрических диполей и излучения приходится учитывать распространение излучения через дипольную среду. Это не относится к магнитным переходам и магнитным резонансным явлениям, поскольку магнитное дипольное излучение обычно имеет длины волн порядка нескольких миллиметров, а подчас и намного больше. Ввиду этого в настоящей главе, посвященной распространению излучения, обсуждаются новые явления, не наблюдавшиеся в экспериментах по магнитному резонансу.

Центральное место занимает здесь нелинейная «теорема площадей» Мак-Колла — Хана. Теорема площадей обобщает и заменяет закон Бера для линейного поглощения, а также ведет к существованию таких эффектов, как распространение без потерь в поглощающей среде, хорошо выраженный распад длинных импульсов на более короткие и сжатие импульсов посредством когерентного поглощения¹⁾.

§ 2. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Как и в классическом случае, считаем, что электрическое дипольное излучение распространяется вдоль оси z . Для рассмотрения широкого класса эффектов достаточно использовать одномерное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(t, z) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(t, z). \quad (4.1)$$

Удельная поляризация определяется классически, за исключением того, что $ex(t, z)$ следует заменить на $d\langle \hat{\sigma}_1(t, z) \rangle$:

$$P(t, z) = \mathcal{N} d \langle \hat{\sigma}_1(t, z) \rangle_{\text{ср.}}$$

¹⁾ Большинство вопросов, содержащихся в данной главе, изложено также в сжатой и ясной форме в обзорах [17*, 18*]. — Прим. ред.

Здесь $[\]_{\text{ср}}$ обозначает усреднение по всем диполям в пределах интервала dz вблизи данного z в момент t . При наличии неоднородного уширения это среднее выражается уже знакомой нам формулой, которую мы запишем через медленно меняющиеся амплитуды $u(t, z; \Delta)$ и $v(t, z; \Delta)$:

$$P(t, z) = \mathcal{N}d \int g(\Delta') [u \cos(\omega t - Kz) - v \sin(\omega t - Kz)] d\Delta'. \quad (4.2)$$

Это выражение отличается от классического (1.30) только заменой ex_0 на d . Поле $E(t, z)$ запишем в той же форме, что и в (1.31):

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) [e^{i(\omega t - Kz)} + \text{к. с.}]. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) и (4.3) в волновое уравнение (4.1) и используя предположение о медленности изменения амплитуд, приходим вновь к классическим синфазному и квадратурному уравнениям:

$$(K^2 - k^2) \mathcal{E}(t, z) = 2\pi k^2 \mathcal{N}d \int u(t, z; \Delta') g(\Delta') d\Delta', \quad (4.4a)$$

$$2 \left(K \frac{\partial}{\partial z} + k \frac{\partial}{\partial ct} \right) \mathcal{E}(t, z) = 2\pi k^2 \mathcal{N}d \int v(t, z; \Delta') g(\Delta') d\Delta', \quad (4.4b)$$

согласующимся с интерпретацией E в полуклассической теории излучения как полностью классического поля.

Конечно, дальнейший анализ будет существенно отличаться от классического. Огибающие функции для квантового диполя удовлетворяют нелинейным оптическим уравнениям Блоха, введенным в гл. 3:

$$\dot{u} = -\Lambda v - \frac{u}{T_2'}, \quad (4.5a)$$

$$\dot{v} = \Lambda u - \frac{v}{T_2'} + \kappa \mathcal{E} \omega, \quad (4.5b)$$

$$\dot{\omega} = -\kappa \mathcal{E} v - \frac{\omega - \omega_{\text{равн}}}{T_1}, \quad (4.5b)$$

а u , v и ω существенно ограничены законом сохранения вероятности:

$$u^2 + v^2 + \omega^2 = \text{const},$$

который справедлив на протяжении временных интервалов, малых по сравнению с T_1 и T_2' . Если T_1 и T_2' велики по сравнению с характерной длительностью эксперимента, то затуханием можно пренебречь и представить закон сохранения вероятности в виде (2.37):

$$u^2 + v^2 + \omega^2 = 1. \quad (4.6)$$

Энергия макроскопической системы, состоящей из поглощающего диэлектрика и поля излучения, также сохраняется, если скорости затухания $1/T_1$ и $1/T'_2$ достаточно малы и ими можно пренебречь. В этом случае из квадратурного уравнения Максвелла (4.4б) и уравнения (4.5в) для атомной инверсии можно получить соотношение

$$\frac{c}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (4.7)$$

где введена плотность энергии вещества

$$U = \mathcal{N} \frac{\hbar\omega}{2} \int d\Delta' g(\Delta') w(t, z; \Delta'). \quad (4.8)$$

Очевидно, что соотношение (4.7) представляет собой конкретизацию (1.5) и выражает закон сохранения энергии в терминах огибающих функций.

В § 5 гл. 2 [после вывода (2.36)] мы отмечали, что именно условие (4.6) выражает, по-видимому, наиболее существенное различие между классической и полуклассической теориями. Классический линейный осциллятор может колебаться с произвольной амплитудой, возрастающей с ростом накопленной им энергии, квантовомеханический же двухуровневый атом может запасать энергию только до $\hbar\omega_0$. Максимальное среднее значение дипольного момента для двухуровневого атома также ограничено. В результате полевые уравнения, начиная с (4.2), содержат вполне определенный параметр d вместо произвольной классической величины ex_0 . Эти ограничения на диапазон изменения энергии и дипольного момента атома приводят, конечно, к прямым физическим последствиям, среди которых наиболее очевидны когерентный и некогерентный эффекты насыщения. В следующих параграфах мы приступим к исследованию явлений когерентного насыщения.

§ 3. ПОВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА БЛОХА

При использовании лазеров с модуляцией добротности и синхронизацией мод относительно просто получить импульсы с длительностью порядка нескольких наносекунд или даже пикосекунд. Вместе с тем в случае разреженных газов или охлажденных твердых тел величина T'_2 зачастую значительно превышает несколько наносекунд. При этом атом в кратковременном процессе его взаимодействия с наносекундным или пикосекундным импульсом практически не испытывает затухания. Благодаря этому динамическую эволюцию переменных диполя можно ис-

следовать так, как если бы затухание вовсе отсутствовало. Оптические уравнения Блоха принимают тогда следующий вид:

$$\dot{u} = -\Delta v, \quad (4.9a)$$

$$\dot{v} = \Delta u + \kappa \mathcal{E} w, \quad (4.9б)$$

$$\dot{w} = -\kappa \mathcal{E} v, \quad (4.9в)$$

и точно выполняется закон сохранения (4.6).

Прежде чем двигаться дальше, установим интервал длин импульсов, в котором справедливы сделанные приближения. Чтобы игнорировать затухание, должна быть достаточно малой длительность импульса: $\tau < T_1, T_2'$. С другой стороны, уравнения Максвелла (4.4) для медленно меняющихся огибающих законны, если длительность τ достаточно велика: $\tau \gg 1/\omega$. Для широкого класса оптически резонансных веществ оба ограничения выполняются, если значения τ лежат в интервале от 10^{-8} до 10^{-13} с. Итак, существует интервал величиной в пять порядков, в котором τ может изменяться без нарушения справедливости наших основных уравнений.

В любом взаимодействии наиболее существенные эффекты наблюдаются обычно при точном резонансе. Поэтому прежде всего мы рассмотрим уравнения Блоха при точном резонансе, помня, что $\mathcal{E}$ теперь зависит от времени. При наиболее простом начальном условии, когда все атомы при $t = 0$ находятся в основном состоянии, получаем $u(t, z, \Delta = 0) = 0$ для всех времен. В этом случае оптические уравнения Блоха сводятся к паре уравнений

$$\dot{v} = \kappa \mathcal{E} w, \quad (4.10)$$

$$\dot{w} = -\kappa \mathcal{E} v, \quad (4.11)$$

которые уже решались [см. (3.1)]:

$$v(t, z; 0) = -\sin \theta(t, z), \quad (4.12)$$

$$w(t, z; 0) = -\cos \theta(t, z), \quad (4.13)$$

причем «угол поворота» вектора Блоха по-прежнему эквивалентен «площади» импульса,

$$\theta(t, z) = \kappa \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t', z) dt', \quad (4.14)$$

за исключением того, что в данном случае возможна дополнительная зависимость от положения z .

Пусть $\Delta \neq 0$. Поскольку поле $\mathcal{E}(t, z)$ зависит теперь от времени, решения Раби, содержащиеся в гл. 3, вообще говоря, неприменимы. Однако разумно предположить, что нерезонансные диполи реагируют на поле $\mathcal{E}$ так же, как и резонансные, но,

быть может, с меньшей амплитудой, зависящей от расстройки. Тем самым предполагается законность простой факторизации

$$v(t, z; \Delta) = v(t, z; 0) F(\Delta), \quad (4.15)$$

где величина $F(\Delta)$ может быть названа дипольной «спектральной функцией отклика». Оказывается, что с помощью этого предположения о факторизации удастся решить уравнения Блоха полностью. Отметим прежде всего, что уравнение (4.9в) немедленно интегрируется, если заменить $\mathcal{E}$ величиной θ согласно (4.15) и выразить v через θ при помощи (4.12) и (4.15). Результат гласит

$$w(t, z; \Delta) = -F(\Delta) \cos \theta + F(\Delta) - 1. \quad (4.16)$$

Нетрудно найти также и $u(t, z; \Delta)$ как функцию θ .

Выражая далее величину $\Delta \dot{u}$ последовательно при помощи (4.9а) и (4.9б) и приравнявая найденные результаты, получаем уравнение для θ

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta^2 F(\Delta)}{1 - F(\Delta)} \sin \theta,$$

хорошо известное в теории физического маятника. Более того, можно утверждать, что коэффициент при $\sin \theta$ не должен зависеть от Δ , поскольку ни $\ddot{\theta}$, ни $\sin \theta$ не зависят от Δ . Этот коэффициент обозначаем как $1/\tau^2$, и уравнение принимает простой вид¹⁾

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\tau^2} \sin \theta = 0. \quad (4.17)$$

Все решения θ выражаются через полные эллиптические функции, характерные для задачи о маятнике [1]

Однако только одно из характерных для задачи о маятнике решений уравнения для угла поворота вектора Блоха может быть согласовано с граничными условиями, которые отвечают единичному импульсу И $\mathcal{E}$, и $\mathcal{E}$ должны обращаться в нуль при $t = \pm \infty$, а вместе с ними и $\dot{\theta}$, θ . Эти ограничения отвечают неосциллирующему маятнику — ситуации, которая возможна, только если маятник был установлен в бесконечно далеком прошлом вертикально вверх, а затем начал падать²⁾ и достигнет опять вертикального положения, двигаясь в одном направлении,

¹⁾ Формула (4.17) есть уравнение движения физического маятника, который выводится из верхнего неустойчивого состояния равновесия. — *Прим ред*

²⁾ С нулевой начальной скоростью В противном случае получаются периодические решения, которые не соответствуют одиночному импульсу — *Прим ред*

в бесконечном будущем Соответствующее решение для θ таково.

$$\theta(t, z) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{t - t_0}{\tau} \right) \right], \quad (4.18)$$

а огибающая электрического поля, которая отвечает такому поведению θ , представляет собой знаменитый импульс Мак-Колла — Хана [2] в форме гиперболического секанса:

$$\mathcal{E}(t, z) = \frac{2}{\kappa \tau} \operatorname{sech} \frac{t - t_0}{\tau}. \quad (4.19)$$

Зависимость θ и $\mathcal{E}$ от z неявно содержится пока в t_0 . Параметр τ определяет длительность импульса и является главной характеристикой решения. Дипольная спектральная функция отклика может быть выражена через длительность импульса и расстройку:

$$F(\Delta) = \frac{1}{1 + (\Delta \tau)^2} \quad (4.20)$$

и является, очевидно, лоренцевой.

Можно получить также точные аналитические решения для атомных переменных. Проще всего это сделать, используя соотношение $\cos(\theta/2) = -\operatorname{th}[(t - t_0)/\tau]$. В результате получаем [2]

$$u = \frac{2 \Delta \tau}{1 + (\Delta \tau)^2} \operatorname{sech} \frac{t - t_0}{\tau}, \quad (4.21a)$$

$$v = \frac{2}{1 + (\Delta \tau)^2} \operatorname{sech} \frac{t - t_0}{\tau} \operatorname{th} \frac{t - t_0}{\tau}, \quad (4.21б)$$

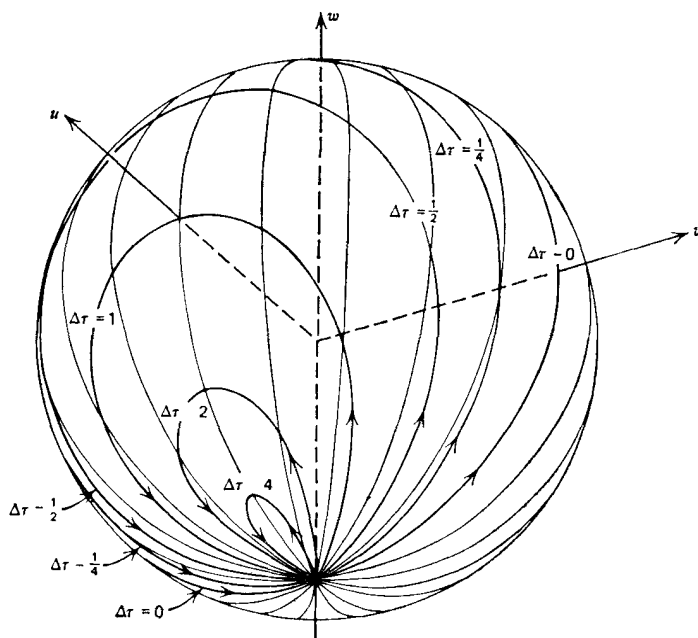
$$w = -1 + \frac{2}{1 + (\Delta \tau)^2} \operatorname{sech}^2 \frac{t - t_0}{\tau}. \quad (4.21в)$$

Легко проверить, что из (4.21) прямо вытекает закон сохранения вероятности $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Таким образом, решение для взаимосвязанных переменных Блоха u , v и w определяется относительно просто. Траектория вектора Блоха на единичной сфере, которая соответствует этому решению, показана на фиг. 4.1. Разные кривые изображают векторы, отвечающие различным расстройкам Δ . Только при точном резонансе ($\Delta = 0$) проекции векторов на ось u обращаются в нуль в соответствии с тем, что здесь диполь колеблется точно в квадратуре с электрическим полем.

Однако значимость решения (4.19) для огибающей электрического поля этим не исчерпывается. Очень важно, что без использования в какой бы то ни было форме уравнений Максвелла найдена временная зависимость амплитуды электрического поля. Это свидетельствует о том, что нелинейности в уравнениях квантового диполя имеют определяющее значение для резонансных оптических явлений.

Возникает вопрос: каково соотношение между уравнениями Максвелла и единственным в своем роде решением (4.19) атом-

ных уравнений для одиночного импульса? Чтобы ответить на этот вопрос, можно было бы просто подставить (4.19) и (4.21) в уравнение Максвелла. Однако более плодотворный и глубокий подход состоит в том, чтобы решать уравнения Максвелла независимо и выяснить, какие вообще формы импульсов возможны



Фиг. 4.1. Траектории вектора Блоха на единичной сфере, соответствующие решениям уравнений Блоха, которые задаются формулами (4.21) [2]

Различные траектории отвечают векторам Блоха с различными расстройками, указаны значения $\Delta\tau$. В каждом случае движение вектора Блоха определяется 2π импульсом, который задается уравнением (4.19), τ — длительность импульса

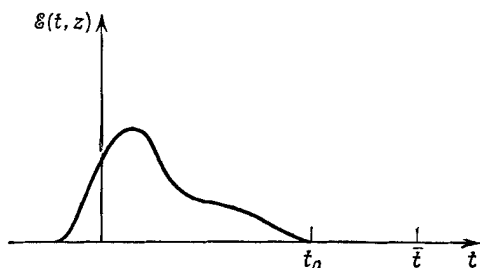
Такой подход непосредственно приводит к квантовомеханической «теореме площадей» Мак-Колла — Хана [2]

§ 4. «ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ» МАК-КОЛЛА — ХАНА

В § 6 гл. 1 было введено и использовано понятие «площади» огибающей электрического поля, в частности, для того, чтобы заново вывести закон Бера для поглощения электрического поля в диэлектрике. Более того, подход, связанный с введением «площади», оказался удобнее при переходе от стационарного случая к импульсу произвольной формы. В рамках этого подхода было показано, что экспоненциальный закон ослабления остается

справедливым даже тогда, когда время затухания отдельного диполя велико по сравнению со временем наблюдения (этот случай мы называли «современным»), но это ослабление возникает благодаря затуханию поляризации вследствие эффекта неоднородной дефазировки, а не вследствие затухания колебаний отдельных диполей.

Мы используем в данном параграфе эти наводящие классические представления и получим квантовомеханическую «теорему площадей», которая как в качественном, так и в количественном отношении отличается от классической теоремы. Изучаемая ситуация в идейном плане аналогична «современному» случаю в гл. 1. Чтобы подчеркнуть это, мы воспроизводим здесь еще раз фиг. 1.2 (см. фиг. 4.2).



Фиг. 4.2. Амплитуда электрического поля при данном z как функция времени.

Момент t_0 обозначает конец импульса; при $t > t_0$ поле равно нулю.

Вводя площадь огибающей согласно (1.38)

$$A(t, z) = \kappa \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t', z) dt', \quad (4.22)$$

проинтегрируем квадратурное уравнение Максвелла (4.46) по времени от $t = -\infty$ до некоторого момента t после прохождения импульса через точку наблюдения z . Квантовомеханический результат, аналогичный классическому выражению (1.39), таков:

$$\frac{\partial A(\bar{t}, z)}{\partial z} = \frac{\pi \mathcal{N} \hbar \kappa^2}{2K} k^2 \int d\Delta g(\Delta) \int_{-\infty}^{\bar{t}} v(t, z; \Delta) dt.$$

Временной интеграл и интеграл по расстройке вычисляются точно так же, как в классическом случае. Несмотря на то что в квантовом уравнении для $\dot{v}$ появляется ω , мы получаем результат

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\pi \mathcal{N} \hbar \kappa^2}{K} k' \pi g(0) v(t_0, z; 0), \quad (4.23)$$

который соответствует классическим соотношениям (1.48) и (1.49). Он получается, если импульс существенно короче T'_2 . Для перехода к точному классическому результату достаточно

выполнить замену $\kappa d \rightarrow e^2/m\omega$, справедливую в классической области.

Однако теперь в наше рассмотрение вовлекаются квантовые нелинейности. В отличие от классической ситуации абсорбционная часть амплитуды резонансного диполя оказывается нелинейной функцией θ и, следовательно, площади:

$$v(t_0, z; 0) = -\sin A(t_0, z). \quad (4.24)$$

Поскольку $\mathcal{E}(t, z) = 0$ для всех $t > t_0$, то $A(\bar{t}, z)$ точно совпадает с $A(t_0, z)$. «Теорема площадей», впервые полученная в 1967 г. Мак-Коллом и Ханом [2], вытекает сразу же из (4.23) и (4.24):

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\bar{t}, z) = -\frac{1}{2} \alpha \sin A(\bar{t}, z). \quad (4.25)$$

Выражение для коэффициента поглощения α приобретает вид

$$\alpha = \frac{4\pi^2 \mathcal{N} \omega d^2 g(0)}{\hbar c}, \quad (4.26)$$

если мы вспомним, что $d = 1/2 \hbar \kappa$, и пренебрежем небольшим различием между K и k . Следует отметить, что в литературе по оптическому резонансу нет общепринятого выражения для α . Это обусловлено различием в определении дипольного момента d . К этому вопросу мы вернемся в § 7.

Часто α называют обратной длиной поглощения Бера; она — квантовый аналог обратной длины поглощения α_k из гл. 1. Действительно, если использовать в (4.26) тождество $2d^2/\hbar = \kappa d$ и затем совершить «классический» переход $\kappa d \rightarrow e^2/m\omega$, то выражение для α совпадет с таковым для α_k [см. выражение (1.35в)]. Этого и следовало ожидать.

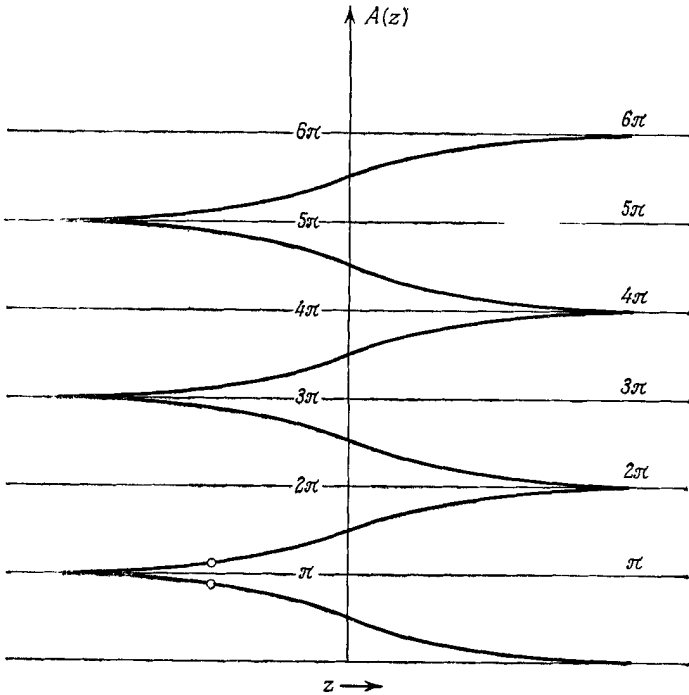
В пределе слабых полей площадь будет малой и $\sin A \approx A$, так что квантовая теорема площадей приводит к линейному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial z} A(t, z) = -\frac{1}{2} \alpha A(t, z) \quad (\text{слабое поле}). \quad (4.27)$$

В то же время в данном пределе существенные возбуждения атома относительно его основного состояния отсутствуют. Как было показано в § 5 гл. 2, атом в состоянии, близком к основному, описывается чисто классическими уравнениями. Следовательно, коэффициент α в квантовой теореме площадей должен быть тем же, что и коэффициент α_k из гл. 1, поэтому классическую теорему площадей можно трактовать как предельный случай квантовой теоремы, отвечающий слабым полям.

Сравнение квантовой и классической теорем площадей [(4.25) и (4.27)] наглядно показывает, что при $A \gtrsim \pi$ квантовое выражение содержит новые закономерности. Особенно важно, что при $A = n\pi$, где n — любое целое число, площадь под огибающей

импульса не уменьшается при его распространении, так как $\partial A / \partial z = 0$. При четных n площади устойчивее, чем при нечетных. Это видно из фиг. 4.3: по мере распространения в глубь поглощающей среды (т. е. с ростом z) площадь стремится к $n\pi$ с четным n .



Фиг. 4.3. Квантовая оптическая теорема площадей Мак-Колла-Хана.

Показано несколько ветвей решения уравнения (4.25), которые определяют площадь огибающей как функцию пути, пройденного импульсом в среде. Значение z , которое отвечает входной плоскости резонансной среды, различно для импульсов с разной входной площадью. Положения входных плоскостей в случаях $0,9\pi$ - и $1,1\pi$ -импульсов показаны кружками на двух нижних кривых.

Гиббс и Слашер [3] успешно использовали наличие третьей ветви на фиг. 4.3 для сжатия и усиления мощных импульсов в *поглощающей* среде. Как видно из фиг. 4.3, мощный импульс с $A = 3\pi$, распространяясь в среде, деформируется так, что $A \rightarrow 2\pi$. Но для импульсов с длительностью, меньшей 10 нс (такие импульсы получить относительно несложно), существенные потери энергии отсутствуют, поскольку ни с какой группой атомов импульс не взаимодействует достаточно долго, чтобы сказались механизмы потерь энергии, связанные с T_1 или T_2 . Поэтому энергия импульса примерно сохраняется безотноситель-

но к его площади В обоснование этого приближения можно сослаться на Мак-Колла и Хана [2]; путем численных расчетов

они показали, что эффективный коэффициент поглощения составляет для такого 3π -импульса всего около $1/10$ значения α в теореме площадей и классическом законе Бера. Вследствие этого имеем для энергий $W_{3\pi} \approx W_{2\pi}$, причем

$$\begin{aligned} W_{3\pi} &\sim \mathcal{E}_{3\pi}^2 \tau_{3\pi}, \\ W_{2\pi} &\sim \mathcal{E}_{2\pi}^2 \tau_{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

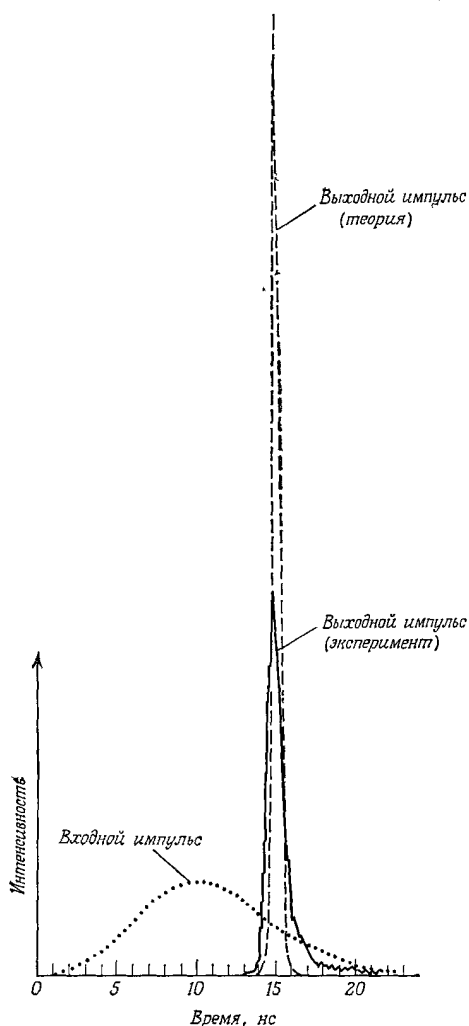
где $\tau_{3\pi}$ и $\tau_{2\pi}$ — соответственно длительности исходного 3π -импульса и порожденного им в конце концов 2π -импульса. Но для достаточно гладких импульсов $(\kappa \mathcal{E}_{2\pi}) \tau_{2\pi} \approx 2\pi$ и $(\kappa \mathcal{E}_{3\pi}) \tau_{3\pi} \approx 3\pi$ (для прямоугольных импульсов эти равенства являются точными). Поэтому, приравнявая энергии $W_{3\pi}$ и $W_{2\pi}$, получаем

$$3\pi \mathcal{E}_{3\pi} = 2\pi \mathcal{E}_{2\pi},$$

а также

$$\tau_{2\pi} = 1/9 \tau_{3\pi}. \quad (4.29)$$

Последнее означает, что по мере превращения 3π -импульса в 2π -импульс он существенно сокращается и одновременно растет по амплитуде. Совершенно реальные практические возможности такого укорочения импульсов показаны на фиг. 4.4.



Фиг. 4.4 Сжатие и пиковое усиление оптического импульса при его распространении в пассивном поглотителе [3].

Входной импульс имел площадь $3,5\pi$

Поскольку площадь импульса и угол поворота диполя θ эквивалентны, то 2π -импульс есть просто импульс, который возвращает диполь точно в исходное состояние. Такой импульс

должен быть, конечно, устойчивым относительно возмущений, обусловленных взаимодействиями с атомами. Действительно, раз уж импульс возвращает диполь точно в исходное состояние, диполь не в состоянии отбирать у него энергию.

Отметим, наконец, что рассмотренные здесь устойчивые долгоживущие квантовые импульсы, существование которых следует из теоремы площадей, в корне отличаются от импульсов, обсуждавшихся в § 7 гл. 1. В самом деле, выведенная здесь теорема площадей базировалась на дефазировке атомных дипольных моментов в интервале от T_2^* до T_2' . Мы не предполагали здесь, что импульс предельно короткий, в то время как в гл. 1 использовались оба условия: $\tau < T_2^*$ и $\tau < T_2'$.

§ 5. САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ

Мак-Колл и Хан, численно решая связанные уравнения Максвелла и оптические уравнения Блоха, получили новое следствие нелинейного взаимодействия поля с резонансными атомами, которое было подтверждено ими и экспериментально [2]. Природу эффекта понять нетрудно. Из квантовомеханической теоремы площадей вытекает, что плавно изменяющиеся оптические импульсы с площадью, целой кратной 2π , будут «устойчивыми». Мак-Колл и Хан на основании проведенных ими численных расчетов заключили, что и форма импульса сохраняется на пути в несколько длин поглощения, если только время распространения в среде еще не становится порядка T_1 и T_2' . При указанных условиях импульсы ведут себя так, как если бы среда была прозрачной; Мак-Колл и Хан называли данное явление «самоиндуцированной прозрачностью», подчеркивая тем самым, что речь идет об особом свойстве самого 2π -импульса, который превращает среду в «прозрачную» для себя. Такое anomальное поведение импульса иллюстрируется фиг. 4.5.

Покажем теперь, что 2π -импульс, устойчивый как по площади, так и по форме, является решением связанных уравнений Максвелла и оптических уравнений Блоха в отсутствие потерь. Сохранение формы импульса для любого наблюдателя позволяет назвать его стационарным. Простейший способ обеспечить стационарность состоит в требовании, чтобы огибающие поля и диполя зависели от временных и пространственных координат только через «локальное время» $\xi = t - z/V$, где V — постоянная скорость импульса. При этом в уравнении (4.46) частные производные превращаются в полные производные по ξ :

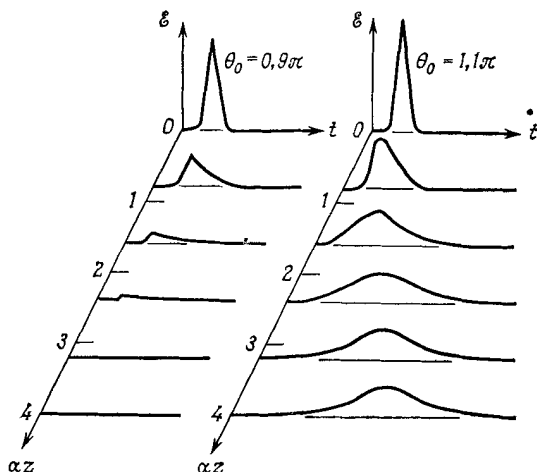
$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\frac{1}{V} \frac{d}{d\xi}.$$

Если обозначить точкой дифференцирование по ξ , то систему уравнений Максвелла можно будет представить в виде

$$(K^2 - k^2) \mathcal{E}(t, z) = + 2\pi k^2 \mathcal{N} d \int u(t, z; \Delta') g(\Delta') d\Delta', \quad (4.30a)$$

$$2 \left(\frac{K}{V} - \frac{k}{c} \right) \dot{\mathcal{E}}(t, z) = - 2\pi k^2 \mathcal{N} d \int v(t, z; \Delta') g(\Delta') d\Delta'. \quad (4.30б)$$

Решение уравнений (4.30) совместно с атомными уравнениями (4.9) без потерь можно получить различными способами.



Фиг. 4.5. Аномальное поведение площади импульса, предсказываемое теоремой площадей [2].

Импульс с площадью, немного меньшей π , ослабляется, и его площадь стремится к нулю, в то время как импульс с входной площадью, немного большей π ослабляется относительно мало, и его площадь стремится к 2π , а форма — к кривой, определяемой гиперболическим секансом

Обычно используется предположение о факторизации (4.15). Мы будем следовать здесь работе Матулика и Эберли [4].

Соотношение (4.7), выражающее закон сохранения энергии и вытекающее из (4.4б), для стационарных импульсов приобретает особенно простой вид, поскольку как левая, так и правая стороны уравнения (4.4б) становятся здесь полными производными по ξ , что позволяет сразу же провести интегрирование. Используя факторизацию (4.15)¹⁾, а также вводя обозначение

$$\frac{1}{\mu^2} \equiv \frac{\pi (\omega/c)^2 \mathcal{N} (d/\kappa)}{K/V - k/c} \int F(\Delta') g(\Delta') d\Delta', \quad (4.31)$$

¹⁾ Из условия факторизации (4.15), записанного применительно к величине v , сразу же вытекает аналогичная факторизация и для зависящих от поля слагаемых величин u и w . — Прим ред

получаем следующее соотношение между атомной инверсией $w(\zeta; \Delta)$ и потоком энергии поля $\mathcal{E}^2(\zeta)$:

$$w(\zeta; \Delta) = w_0(\Delta) + \frac{1}{2}\mu^2 F(\Delta) \mathcal{E}^2(\zeta), \quad (4.32)$$

где $w_0(\Delta)$ — значение инверсии в отсутствие поля. Нетрудно также получить другой интеграл уравнений Максвелла и оптических уравнений Блоха. Исключая $v(\zeta; \Delta)$ из (4.9а) и (4.9в), а также используя (4.32), находим

$$u(\zeta; \Delta) = u_0(\Delta) + \frac{\Delta}{\kappa} \mu^2 F(\Delta) \mathcal{E}(\zeta). \quad (4.33)$$

Это соотношение между $\mathcal{E}$ и синфазной амплитудой диполя весьма похоже на классическое соотношение (1.20а).

Решения (4.32) и (4.33) становятся точными лишь в пределе $T_1 \rightarrow \infty$ и $T'_2 \rightarrow \infty$. При конечных T_1 и T'_2 они дают ошибки порядка t/T_1 и t/T'_2 , где t — время интегрирования. Во всех случаях, представляющих интерес, время интегрирования t ограничено продолжительностью возбуждения, т. е. длительностью импульса τ . Поэтому излагаемые результаты относятся к достаточно коротким импульсам, для которых $\tau/T_1 \ll 1$ и $\tau/T'_2 \ll 1$.

Следующий шаг состоит в получении уравнения для самой огибающей поля. Дифференцируя (4.30б) по ζ , выражая затем $\dot{v}$ как $\Delta u + \kappa \mathcal{E} w$ из второго уравнения Блоха и используя условия сохранения (4.32) и (4.33), можно выразить u и w через $\mathcal{E}$. Результирующее уравнение имеет простой первый интеграл, который можно найти следующим образом. Если предположить, что атомы находятся первоначально в основных состояниях, то при $\zeta = -\infty$ будет $u = v = 0$ и $w = -1$. Далее, для любого реального импульса $\mathcal{E}(-\infty) = 0$ и $\dot{\mathcal{E}}(-\infty) = 0$. Используя эти начальные условия, получаем простейшую форму уравнения для огибающей

$$\dot{\mathcal{E}}^2 = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \mathcal{E}^2 (M^2 - \mathcal{E}^2), \quad (4.34)$$

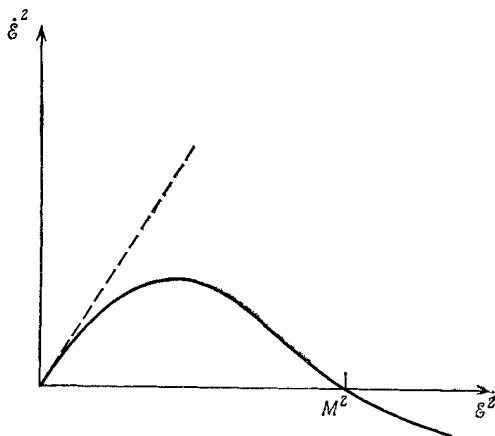
где

$$M^2 = \frac{4}{\kappa^2} \frac{\kappa^2}{\mu^2 F - \Delta^2}. \quad (4.35)$$

Хотя уравнение (4.34) можно проинтегрировать, целесообразно прибегнуть к графической иллюстрации, из которой станут ясны многие закономерности решения. В частности, выявляется физический смысл постоянной M .

На фиг. 4.6 показана зависимость $\dot{\mathcal{E}}^2$ от $\mathcal{E}^2$. Физически допустимые значения $\mathcal{E}^2$ лежат между 0 и M^2 , поскольку величина $\dot{\mathcal{E}}^2$ должна быть положительной. Следовательно, M — максимальное значение $\mathcal{E}$. Далее, ясно, что для очень слабых полей ($\mathcal{E} \ll M$) из уравнения (4.34) вытекает экспоненциальный рост

$\mathcal{E}$ со скоростью $\kappa M/2$. Это значит, что величина M определяет не только максимальную конечную интенсивность импульса, но и скорость приближения к ней. Мы увидим, что эта двойственная роль M эквивалентна ограничению на площадь импульса. Скорость роста огибающей поля для слабых полей обозначают обычно через $1/\tau$. Поэтому $M^2 = 4/\kappa^2 \tau^2$; в результате, используя



Фиг. 4.6. Графическая иллюстрация на фазовой плоскости, относящаяся к уравнению (4.34), которое описывает огибающую стационарного импульса. Один и тот же параметр M определяет как максимальное значение огибающей, так и скорость роста ξ/ξ в слабых полях, чем фиксируется и площадь импульса. Угловой коэффициент пунктирной прямой равен $(\tau M/2)^2$ [4].

определение (4.35) и условие $F(0) = 1$, находим отдельно $F(\Delta)$ и μ^2 :

$$F(\Delta) = \frac{1}{1 + (\Delta\tau)^2} \quad (4.36)$$

и

$$\mu^2 = \kappa^2 \tau^2. \quad (4.37)$$

Наконец, из этих параметрических расчетов либо прямым интегрированием уравнения (4.34) можно получить в явном виде решение для огибающей функции

$$\mathcal{E}(\xi) = \frac{2}{\kappa\tau} \operatorname{sech} \frac{\xi}{\tau}. \quad (4.38)$$

Легко показать, что площадь огибающей (4.38) есть 2π при любых κ и τ . Как уже указывалось, это следствие того факта, что и максимальная амплитуда $2/\kappa\tau$, и скорость роста в слабых полях $1/\tau$ содержат τ одинаковым образом.

Решение (4.38) для огибающей совпадает с полученным ранее, [см. (4.19)], правда, в роли переменной выступает теперь $\xi = t - z/V$. Найденное выражение для $F(\Delta)$ также совпадает с полученным ранее. Нетрудно проверить, что и для u , v , w получаются выражения, совпадающие с (4.21). Следовательно, решение временных уравнений Блоха, полученное в § 3 данной главы, согласуется с найденным здесь решением взаимосвязанных уравнений Максвелла и Блоха, содержащих пространственную и временную зависимости, при условии, что импульс и связанное с ним взаимодействие распространяются с постоянной скоростью V^1). Проанализируем детально выражение для скорости секансоидального 2π -импульса (4.38). Из соотношения (4.37) и определения (4.31) получаем

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{c} + \frac{\pi A^2 \hbar \omega \kappa^2}{2c} \int \frac{g(\Delta') d\Delta'}{\Delta'^2 + (1/\tau)^2}.$$

Мы использовали здесь результат, который выведем ниже, а именно то, что в хорошем приближении $K \approx k = \omega/c$. Воспользовавшись выражением (4.26) для коэффициента поглощения α , представим формулу для V в виде

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{c} = \frac{\alpha}{2\pi g(0)} \int \frac{g(\Delta') d\Delta'}{\Delta'^2 + (1/\tau)^2}. \quad (4.39)$$

Если длительность импульса τ существенно превышает $T_2^* \approx \pi g(0)$, то этот интеграл можно вычислить приближенно, предполагая, что функция $g(\Delta')$ достаточно гладкая, и вынося ее из под знака интеграла при $\Delta' = 0$. Тогда

$$\frac{c}{V} = 1 + \frac{1}{2} \alpha \tau, \quad (4.40)$$

т. е. получается исключительно простое соотношение между длительностью импульса и скоростью его распространения. Поскольку $c\tau$ может быть порядка нескольких метров, т. е. гораздо больше, чем длина поглощения среды α^{-1} , то скорость импульса в среде может оказаться значительно меньше c . Этот эффект проверен экспериментально и обсуждается в гл. 5. Из (4.40) вытекает, что задержка 2π -импульса на длине L , обусловленная различием V и c , равна

$$\tau_3 = \frac{L}{V} - \frac{L}{c} = \frac{1}{2} (\alpha L) \tau. \quad (4.41)$$

Нетрудно также проверить, пользуясь уже найденными решениями для $\mathcal{E}$ и u , что синфазное уравнение Максвелла (4.30а)

¹⁾ Решения в виде одиночных стационарных импульсов, распространяющихся с постоянной скоростью, называют часто «солитонами» [19*]. — *Прим ред.*

также удовлетворяется секансоидальным 2π -импульсом (4.38), если текущий волновой вектор K удовлетворяет условию

$$\frac{K^2 - k^2}{2k} = \frac{\alpha}{2\pi g(0)} \int \frac{\Delta' g(\Delta') d\Delta'}{\Delta'^2 + (1/\tau)^2}.$$

Обычно $g(\Delta')$ — гладкая функция, так что подынтегральное выражение здесь почти нечетно. Соответственно этому значение интеграла весьма мало, и с точностью до величин первого порядка малости дисперсионное соотношение для K сводится к следующему:

$$K - k = \frac{\alpha}{2\pi g(0)} \int \frac{\Delta' g(\Delta') d\Delta'}{\Delta'^2 + (1/\tau)^2}. \quad (4.42)$$

Выше, при получении (4.39), мы уже использовали условие $K \approx k$, которое, таким образом, теперь обосновано.

Суммируя, можно сказать следующее: явление самоиндуцированной прозрачности заключается в том, что короткие когерентные импульсы распространяются в резонансных поглощающих средах на аномально большие расстояния с аномально малыми скоростями. Интересно, что внешне данное явление во многом выглядит как классическое. Так, ни формула скорости (4.39), ни закон дисперсии (4.42) не содержат $\hbar$ явно. И только из выражения (4.38) для огибающей импульса видна неклассическая и нелинейная сущность явления: постоянная α имеет реальный смысл только в нелинейной квантовой теории дипольных осцилляторов.

До сих пор мы говорили лишь о стационарном 2π -импульсе, в то время как в теореме площади нет существенного различия между 2π -, 4π - и другими $2n\pi$ -импульсами, а также между стационарным и нестационарным импульсами. И действительно, можно показать [4], что, помимо секансоидального 2π -импульса (4.38), других стационарных решений в виде одиночного импульса для поглотителя с неоднородным уширением не существует. Исследовались, однако, импульсы двух других типов. С одной стороны, Ареки и др. [5], Крип [6] и Эберли [7] показали, что возможны решения в виде бесконечной последовательности импульсов. Их площадь равна $2\pi \infty$, а форма огибающей определяется через эллиптические функции. Последнее естественным образом вытекает из того факта, что основное уравнение поля [в форме (4.17) или (4.34)] совпадает с уравнением маятника, решения которого в виде эллиптических функций хорошо известны. Физически такие решения соответствуют непрерывному обмену энергией между стационарной оптической волной и атомами, подобно тому как для маятника, способного совершать полные обороты вокруг точки подвеса, при вращении происхо-

дит непрерывное превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Совершенно иной тип самоиндуцированной прозрачности для импульса исследовался впервые Г. Л. Лэмбом-младшим [8]. Методы Лэмба допускают аналитическое описание импульсов, распространяющихся без потерь, но с изменением формы. В его работе описаны импульсы с площадью, равной, например, 4л или 6л. При этом происходит разбиение импульса на дискретную последовательность 2π -импульсов с различными длительностями, амплитудами и скоростями. Здесь возникает целая совокупность эффектов, и в том числе эффект «рассеяния» одного импульса другим, когда два импульса, распространяющихся с различными скоростями, проходят друг через друга.

На фиг. 4.7 процесс распадного типа показан, начиная с точки, в которой два импульса сливаются в один. Аналитическое выражение для их общей огибающей, согласно Лэмбу [8], таково:

$$\kappa \mathcal{E}(t, z) = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \times \\ \times \frac{\frac{2}{\tau_1} \operatorname{sech} \frac{\xi_1}{\tau_1} + \frac{2}{\tau_2} \operatorname{sech} \frac{\xi_2}{\tau_2}}{1 - \frac{2\tau_1\tau_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \left(\operatorname{th} \frac{\xi_1}{\tau_1} \operatorname{th} \frac{\xi_2}{\tau_2} - \operatorname{sech} \frac{\xi_1}{\tau_1} \operatorname{sech} \frac{\xi_2}{\tau_2} \right)}, \quad (4.43)$$

где τ_1 и τ_2 — длительности импульсов, а $\xi_1 = t - z/V_1$ и $\xi_2 = t - z/V_2$ суть соответствующие «локальные времена». Скорости $V_{1,2}$ связаны с соответствующими длительностями импульсов выражениями типа (4.40). В процессе расхождения импульсов после столкновения происходит разбиение общей огибающей $\mathcal{E}(t, z)$ на две отдельные стационарные огибающие площадью 2π каждая:

$$\mathcal{E}(t, z) \rightarrow \frac{2}{\kappa\tau_1} \operatorname{sech} \left(\frac{\xi_1}{\tau_1} \pm \varphi \right) + \frac{2}{\kappa\tau_2} \operatorname{sech} \left(\frac{\xi_2}{\tau_2} \mp \varphi \right).$$

Относительная фаза φ сравнительно просто зависит от длительностей импульсов:

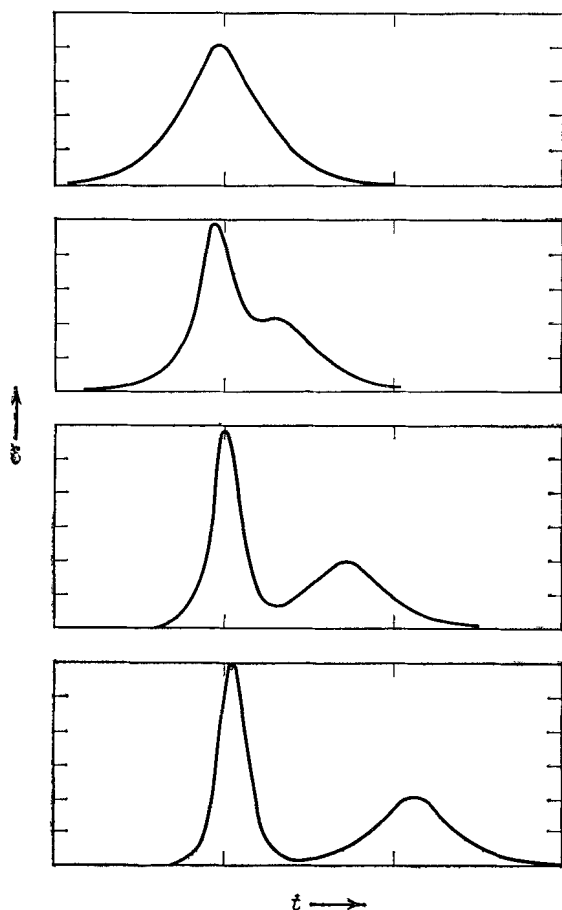
$$\varphi = 2 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{-1}.$$

На фиг. 4.8 показано разбиение на три стационарных импульса по мере удаления от точки столкновения.

Следует отметить, что о процессах типа показанных на фиг. 4.7 и 4.8 говорят обычно не как о «соударениях», а как о примерах «разбиения», в данном случае 4π - и 6π -импульсов. Термин «разбиение» более созвучен обычной экспериментальной

практике. Такое разбиение изучали, в частности, Гиббс и Слэшер, результаты которых мы обсудим в следующей главе.

Интересно, что среди ряда возможных импульсов с нулевой площадью [8], называемых 0π -импульсами, существует импульс,

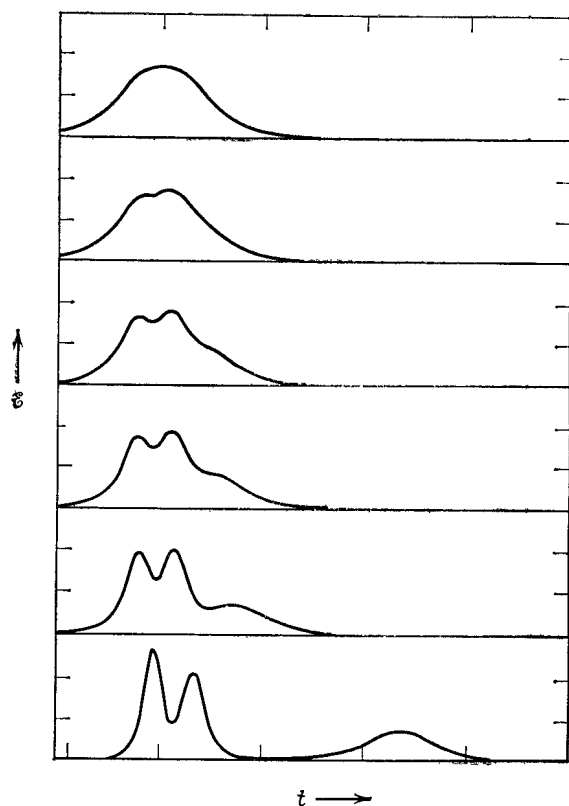


Фиг. 4.7. Разбиение 4π -импульса на два 2π -импульса.

Показана огибающая как функция времени для четырех различных положений. Отметим, что пиковое значение растет в процессе разбиения.

поведение которого, по-видимому, не может быть интерпретировано в терминах «столкновение» или «разбиение». На фиг. 4.9 показана временная эволюция такого импульса. Его можно назвать «связанным состоянием» двух устойчивых импульсов с площадями, скажем, $+2\pi$ и -2π . Устойчивость такого «связан-

ного состояния», а также наблюдение квантованных площадей для других импульсов с $A = \pm 2\pi$ породили целый ряд умоузорительных построений, касающихся нелинейных волновых уравнений частиц и возможности объяснить нелинейными фундаментальными взаимодействиями устойчивость элементарных частиц.



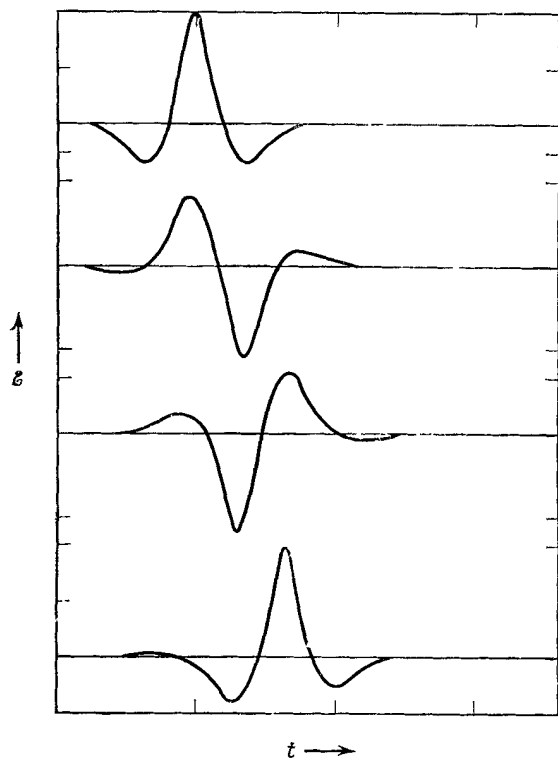
Фиг. 4.8. Разбиение 6π -импульса на три 2π -импульса [8].

Показана огибающая как функция времени для шести различных положений. Вновь отметим, что пиковое значение растет в процессе разбиения.

Обсуждение некоторых из этих вопросов можно найти в работе Рубинштейна [9], посвященной так называемому синус-уравнению Гордона.

Наконец, следует упомянуть, что в самое последнее время удалось получить нестационарные решения уравнений для медленно меняющихся оптических импульсов при произвольном числе N 2π -импульсов. Решение, предположенное Гиббоном и Эйлбеком [10], было затем подтверждено ими совместно с Кодри

и Булафом [11]. Интересны и открытые Абловитцем и др. [12] решения задач с начальными условиями применительно к широкому классу нелинейных динамических уравнений. Для нахождения этих решений использовался метод инверсного рассеяния.



Фиг. 4.9. «Связанное состояние» для Ол-импульса, которое не дает «разбиения» [8].

Существование единого метода, который позволяет успешно рассматривать такие нелинейные динамические уравнения, как уравнения Кортевега — де Вриза, синус-уравнение Гордона и уравнение Бенни — Нивелла, а также уравнение для оптических импульсов, свидетельствует о важной общности явлений в весьма различных областях физики, исследование которой еще только начинается, но дальнейший прогресс в этой области будет, несомненно, быстрым¹⁾.

¹⁾ Некоторые из затронутых здесь вопросов, в частности уравнения Кортевега — де Вриза и их решения, обсуждаются в обзоре [19*]. — Прим ред.

§ 6. ЭФФЕКТЫ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Если мы примем для поля более общее по сравнению с ранее использованным выражение вида

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) \{e^{i[\omega t - Kz + \varphi(t, z)]} + \text{к. с.}\}, \quad (4.44)$$

где $\varphi(t, z)$ — фазовая функция, которая медленно меняется в том же смысле, что и $\mathcal{E}(t, z)$, то в теории возникают определенные модификации. Как и ранее, будем обозначать волновой вектор в вакууме ω/c через k . Текущий вектор равен теперь $K = \partial\varphi/\partial z$ и не обязательно постоянен. Можно также ввести мгновенную частоту поля

$$\omega(t) = \omega + \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, z), \quad (4.45)$$

что позволяет дополнительно учесть эффекты частотной модуляции.

Основные уравнения Блоха остаются при этом без изменения, если пользоваться по-прежнему вращающейся системой координат. Обычно удобнее всего использовать систему, вращающуюся с мгновенной частотой поля. При этом в уравнениях Блоха во вращающейся системе появляются новые нелинейности:

$$\dot{u} = -(\Delta - \dot{\varphi})v, \quad (4.46a)$$

$$\dot{v} = (\Delta - \dot{\varphi})u + \kappa \mathcal{E}w, \quad (4.46б)$$

$$\dot{w} = -\kappa \mathcal{E}v, \quad (4.46в)$$

что, конечно, значительно усложняет анализ. Наличие частотно-модулированного поля не меняет, однако, закона сохранения вероятности для атома: как и прежде, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, что нетрудно проверить.

Помимо изменений в уравнениях Блоха, в волновом уравнении Максвелла (оно второго порядка) появляется более общая медленно меняющаяся синфазная часть. Нетрудно убедиться, что уравнения Максвелла приобретают вид

$$\mathcal{E} \left(K^2 - k^2 - 2K \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2k \frac{\partial \varphi}{\partial ct} \right) = 2\pi k^2 \mathcal{N} d \int u g(\Delta') d\Delta', \quad (4.47)$$

$$\left(K \frac{\partial}{\partial z} + k \frac{\partial}{\partial ct} \right) \mathcal{E} = 2\pi k^2 \mathcal{N} d \int v g(\Delta') d\Delta'. \quad (4.48)$$

Достаточно указать три проблемы, в которых фазовая модуляция играет роль. В первой из них речь идет о влиянии на атомы при точном резонансе сильного заданного внешнего поля. Это вариант проблемы Раби, когда нас интересует не излучение атомов, а лишь их отклик на приложенное поле. По-

этому достаточно использовать лишь уравнения (4.46) с $\Delta = 0$ без привлечения уравнений Максвелла.

Не претендуя на общее исследование, просто укажем, что справедливо некоторое «естественное» решение, если огибающая внешнего поля задана в виде гиперболического секанса, а его частота изменяется по закону гиперболического тангенса. Если дано так много, то уже нетрудно построить полное решение. Обозначим величину смещения частоты через $2\delta\omega$. Тогда

$$\dot{\phi} = -\delta\omega \operatorname{th} \frac{t-t_0}{\tau}, \quad (4.49a)$$

$$u = \frac{-\delta\omega\tau}{\sqrt{1+(\delta\omega\tau)^2}} \operatorname{sech} \frac{t-t_0}{\tau}, \quad (4.49б)$$

$$v = \frac{-1}{\sqrt{1+(\delta\omega\tau)^2}} \operatorname{sech} \frac{t-t_0}{\tau}, \quad (4.49в)$$

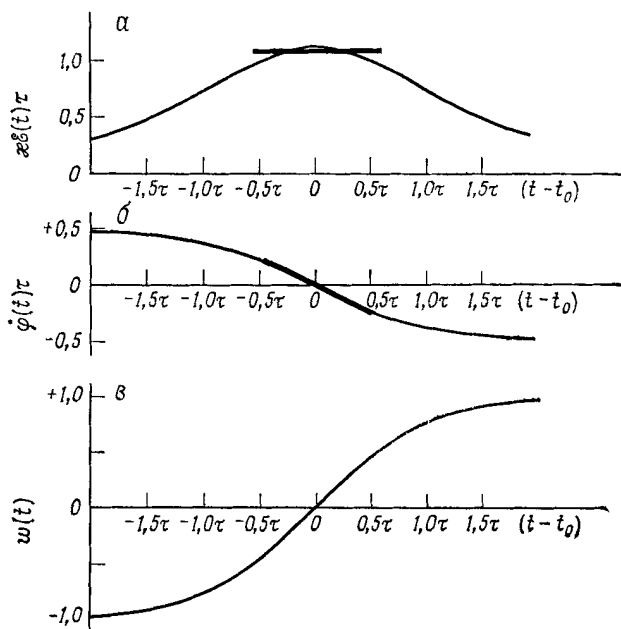
$$\omega = \operatorname{th} \frac{t-t_0}{\tau}, \quad (4.49г)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\kappa\tau} \sqrt{1+(\delta\omega\tau)^2} \operatorname{sech} \frac{t-t_0}{\tau}. \quad (4.49д)$$

Интересно, что решения (4.49) позволяют получить аналитически точное обобщение известных приближенных результатов по адиабатической инверсии. То обстоятельство, что полученное решение должно иметь некоторое отношение к адиабатической инверсии, неудивительно. Последняя реализуется в случае магнитного резонанса путем медленного изменения составляющей постоянного магнитного поля вдоль оси z , так что эффективное поле изменяет знак и все спины инвертируются. Однако из выражения (2.41) для вектора вращающего момента во вращающейся системе координат видно, что использовать частотную модуляцию приложенного поля, т. е. временную зависимость ω , столь же эффективно, как и изменять ω_0 .

Адиабатические изменения, связанные с (4.49), иллюстрируются фиг. 4.10. В одной и той же временной шкале представлены атомная инверсия w , амплитуда внешнего поля $\mathcal{E}(t, z)$ и мгновенная девиация частоты $\phi(t, z)$. Жирные линии на графиках $\mathcal{E}$ и ϕ отвечают уровню амплитуды постоянного поля и линейному свипированию частоты, что обычно предполагается в приближенных расчетах. Важно осознать, что аналитичность нашего точного решения исключает все ограничения, связанные с адиабатичностью. Дело в том, что диполи «приготавливаются» к приходу инвертирующего импульса областью его переднего фронта, где он еще крайне слаб, а изменение поля бесконечно плавное. Вследствие этого процесс инверсии оказывается фактически медленным: он начинается задолго до прихода максимума импульса, даже если этот максимум короткий и резкий. Это со-

ображение представляет интерес в экспериментальном плане, когда приходится преодолевать трудности, связанные с неоднородным уширением. Краткое обсуждение усложнений, обусловленных влиянием T_2^* , проведено Трисы [13]



Фиг. 4.10. Иллюстрация к решениям (4.49), демонстрирующая «неадиабатическую» инверсию частотно-модулированным импульсом в виде гиперболического секанса.

Полученные решения справедливы при произвольной малой частотной модуляции. Если $\delta\omega \rightarrow 0$, то $\mathcal{E}$ превращается в обычный π -импульс. Площадь под огибающей, которая, согласно (4.49), в общем случае имеет вид

$$A = \int \kappa \mathcal{E}(t, z) dt = \pi \sqrt{1 + (\delta\omega\tau)^2},$$

при $\delta\omega \rightarrow 0$ обращается в π . Естественно думать, что π -импульс инвертирует атомы. С другой стороны, если частотная модуляция достаточно велика, так что $\delta\omega\tau = \sqrt{3}$, то $A = 2\pi$. Здесь физика решений сложнее: мы обнаруживаем 2π -импульс, который лишь инвертирует атомы, не возвращая их в основное состояние.

Качественно суть дела такова. При наличии частотной модуляции эквивалентность площади импульса и угла поворота дipoля уже не имеет места. Наиболее существенным следствием этого является нарушение в принципе теоремы площадей. Какого-либо ее видоизменения для случая частотной модуляции получено не было. Возникает, таким образом, вторая проблема, связанная с частотной модуляцией.

Тот факт, что при наличии частотной модуляции теряет силу теорема площадей, может вызвать определенные сомнения в ценности решения (полученного в § 5) для самоиндуцированной прозрачности при распространении 2π -импульса в отсутствие затухания. Может показаться, что такая ситуация представляет собой только математическую фикцию, относящуюся лишь к физически нереальному случаю, когда импульс полностью лишен частотной модуляции.

Показано [14], однако, что в рамках приближений § 5 никакая частотная модуляция для самосогласованного импульса, форма которого сохраняется, невозможна. Существенным приближением было отбрасывание членов со вторыми производными в уравнениях для медленно меняющихся огибающих, которые вытекают из общих уравнений Максвелла. В пределах ограничения, связанного с медленностью изменения, стационарное решение для поля возможно, как оказывается, лишь при $\varphi(t, z) = \text{const}$; поэтому $\dot{\varphi}$ тождественно обращается в нуль, и справедливость теоремы площадей обеспечивается. Покажем это.

Как и в предыдущем параграфе, производные по $\xi = t - z/V$ будут отмечаться точкой. После перехода к переменной ξ продифференцируем синфазное уравнение Максвелла (4.47) еще раз. Производную $\dot{\varphi}$, которая появляется при дифференцировании, можно исключить, используя (4.46а), а для упрощения интегрирования по расстройкам Δ' целесообразно использовать предположение о факторизации (4.15). В итоге получаем следующий результат:

$$2\dot{\mathcal{E}}\dot{\varphi} + \mathcal{E}\ddot{\varphi} = \left(\bar{\Delta} - \frac{K - k}{V^{-1} - c^{-1}} \right) \mathcal{E}, \quad (4.50)$$

где мы использовали очень хорошее приближение ($K^2 - k^2$)/ $2K \cong K - k$ и обозначение

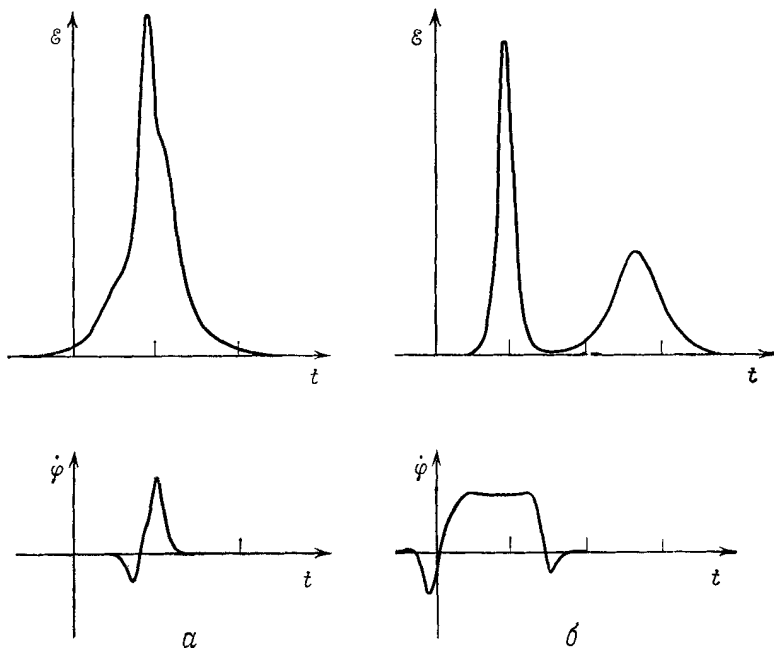
$$\bar{\Delta} \equiv \frac{\int \Delta' F(\Delta') g(\Delta') d\Delta'}{\int F(\Delta') g(\Delta') d\Delta'}. \quad (4.51)$$

Уравнение для фазы (4.50) является линейным уравнением первого порядка относительно $\dot{\varphi}$; его интегрирующим множителем

служит $\mathcal{E}$. Из его решения

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \left(\bar{\Delta} - \frac{K - k}{V^{-1} - c^{-1}} \right) \quad (4.52)$$

сразу же вытекает, что $\dot{\phi} = \text{const}$. Естественно полагать, что сдвиг частоты импульса отсутствует при $t = -\infty$, когда импульса еще нет, т. е. $\dot{\phi}(-\infty) = 0$. Но тогда из (4.52) следует,



Фиг. 4.11. Огибающая и скорость изменения фазы 4π -импульса в исходном положении (а) и после прохождения некоторого пути в резонансной среде (б) [15].

Масштаб в каждом случае свой.

что $\dot{\phi}(\xi) = 0$ при любых ξ . Иначе говоря, в случае медленно меняющегося стационарного импульса какая-либо частотная модуляция невозможна. Отметим, что данный результат является более общим, чем это может показаться на первый взгляд. Если использовать условие $\dot{\phi} = 0$ в (4.52), то получим

$$\frac{K - k}{V^{-1} - c^{-1}} = \frac{\int \Delta' F(\Delta') g(\Delta') d\Delta'}{\int F(\Delta') g(\Delta') d\Delta'}, \quad (4.53)$$

что совпадает с отношением выражений (4.41) и (4.39) для $K - k$ и $1/V - 1/c$.

Наконец, третья проблема (она возникла совсем недавно) связана с учетом влияния фазовой модуляции на распространение импульса. Лэмб [15] включил эффекты фазовой модуляции в уравнения для оптического импульса. Он показал в согласии с результатами Матулика [14], что медленно меняющийся 2π -импульс не является частотно-модулированным, но что столкновение двух 2π -импульсов, имеющих различные несущие частоты, приводит к возникновению 4π -импульса, который может оказаться частотно-модулированным. Пример такого столкновения (или разбиения) показан на фиг. 4.11¹⁾.

§ 7. ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

Определенные выгоды при исследовании оптического резонанса может принести использование циркулярно-поляризованного света. Оптические уравнения Блоха (2.36) становятся тогда точными, и для их вывода приближение вращающейся волны уже не требуется. Однако при замене формул для линейно-поляризованного света соответствующими формулами для циркулярной поляризации нужна осторожность. Дело в том, что в литературе отсутствует общепринятое определение дипольного момента d . Этот вопрос детально обсуждали Слашер и Гиббс ([16], прилож. D).

Такой переход выполняется непосредственно, если последовательно соблюсти ряд простых правил. В качестве иллюстрации мы выведем уравнения Блоха и уравнения Максвелла для медленно меняющейся огибающей в случае циркулярно-поляризованного света применительно к переходу $|\Delta M| = 1$.

Огибающую для циркулярно-поляризованной световой волны удобно определить так:

$$E_c(t, z) = (\sqrt{2}) \mathcal{E} [x \cos(\omega t - Kz) + y \sin(\omega t - Kz)]. \quad (4.54)$$

Множитель $\sqrt{2}$ введен для того, чтобы энергия волны совпадала с энергией линейно поляризованной волны, записанной

¹⁾ В связи с вопросом о влиянии фазовой модуляции существенно подчеркнуть, что достаточно мощный (с площадью, большей π) одиночный входной импульс, не обладающий фазовой модуляцией, пройдя определенное расстояние в квазирезонансной среде, превращается в стационарный 2π -импульс (переходный процесс удается исследовать лишь путем численных расчетов) [2, 18*]. При наличии же фазовой модуляции возможны новые решения, которые отвечают бесконечной периодической последовательности импульсов. Интересное обсуждение дальнейших закономерностей, связанных с фазовой модуляцией (в том числе обусловленных копейностью времен релаксации, зависимостью показателя преломления от поля, наличием других уровней энергии и т. п.), содержится в обзоре [18*] — Прим ред.

в виде (4.3):

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathcal{E} \mathbf{x} [e^{i(\omega t - Kz)} + \text{к. с.}], \quad (4.55)$$

который мы последовательно используем в данной книге. Множитель $\sqrt{2}$ заключен в круглые скобки, поскольку он не всегда вводится (см., например, [2]).

Точная форма уравнений Максвелла и оптических уравнений Блоха зависит от определения огибающей. Форма же уравнений Блоха зависит лишь от матричных элементов произведения $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$. Для перехода с $|\Delta M| = 1$ вектор $\mathbf{d}_{+-}$ пропорционален вектору $\mathbf{x} \pm iy$ (с числовым коэффициентом пропорциональности). Это видно, например, из (2.11). Мы определяем величину d для перехода с $|\Delta M| = 1$ следующим образом:

$$\mathbf{d}_{+-} = d \frac{\mathbf{x} - iy}{(\sqrt{2})}. \quad (4.56)$$

Благодаря введению множителя 2 имеем $\mathbf{d}_{+-} \cdot \mathbf{d}_{-+} = d^2$, что согласуется с (2.27), (2.28) и с формулами оставшейся части книги. Вновь величина $\sqrt{2}$ заключена в круглые скобки, потому что она вводится не всеми авторами. Ясно, что если в определениях (4.54) и (4.56) одновременно опустить величины $(\sqrt{2})$, как это делают Мак-Колл и Хан [2], то произведение $\mathbf{d}_{+-} \cdot \mathcal{E}$ не изменится; оно останется равным $d\mathcal{E} \exp[-i(\omega t - Kz)]$. Поэтому в любом случае получаем оптические уравнения Блоха, которые во вращающейся системе координат совпадают с уравнениями (2.29) при том же определении (2.28) для κ .

Иначе обстоит дело с уравнениями Максвелла, поскольку огибающая поля и дипольный момент стоят в разных сторонах уравнений. Удельная поляризация $P(t, z)$ определяется через среднее значение оператора дипольного момента. Поскольку для перехода $\Delta M = \pm 1$ $\mathbf{d}_{+-}$ комплексно, соответствующая операторная форма для $\hat{\mathbf{d}}$ содержит операторы $\hat{\sigma}_{1,2}$, так что

$$\hat{\mathbf{d}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{+-} \\ \mathbf{d}_{-+} & 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{(\sqrt{2})} (\mathbf{x}\hat{\sigma}_1 + y\hat{\sigma}_2). \quad (4.57)$$

Здесь использованы определение (4.56) и свойство эрмитовости $\mathbf{d}_{-+} = (\mathbf{d}_{+-})^*$. Итак, пользуясь определениями (2.21) и (2.25), находим

$$\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \frac{d}{(\sqrt{2})} \{u [\mathbf{x} \cos(\omega t - Kz) + y \sin(\omega t - Kz)] + v [-\mathbf{x} \sin(\omega t - Kz) + y \cos(\omega t - Kz)]\}, \quad (4.58)$$

где u и v имеют тот же смысл, что и ранее: u есть амплитуда синфазной, а v — квадратурной относительно $\mathbf{E}_0$ частей $\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle$,

Соответствующие уравнения Максвелла для медленно меняющихся величин с учетом записи (4.54) для E_d и того, что $P = \mathcal{N} \langle \hat{d} \rangle$ [где $\langle \hat{d} \rangle$ определяется формулой (4.58)], имеют следующий вид:

$$(K^2 - k^2)(\sqrt{2}) \mathcal{E}(t, z) = 4\pi k^2 \mathcal{N} \frac{d}{(\sqrt{2})} u(t, z; \Delta), \quad (4.59a)$$

$$2 \left(K \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial ct} \right) (\sqrt{2}) \mathcal{E}(t, z) = 4\pi k^2 \mathcal{N} \frac{d}{(\sqrt{2})} v(t, z; \Delta). \quad (4.59b)$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (4.4) (если забыть о неоднородном уширении), только если сохранены оба множителя $(\sqrt{2})$. В противном случае приходим к уравнениям в форме Мак-Колла — Хана. В физическом плане различия, конечно, несущественны, поскольку они возникают вследствие разных определений «огibaющей» $\mathcal{E}$ и «дипольного момента» d . Эти различия необходимо, естественно, учигывать при сравнении результатов разных авторов, если они содержат в явном виде d или $\mathcal{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Byrd P. F., Friedman M. D., Handbook of Elliptic Integrals, Berlin, 1954, p. 7, example V.
- 1a*. Мак-Миллан, Динамика твердого тела, ИЛ, 1951.
2. McCall S. L., Hahn E. L., Phys. Rev., **183**, 457 (1969); Phys. Rev. Lett., **18**, 908 (1967).
3. Gibbs H. M., Slusher R. E., Appl. Phys. Lett., **18**, 505 (1971).
4. Matulic L., Eberly J. H., Phys. Rev., **A6**, 822, 1258E (1972).
- Marth R. A., Holmes D. A., Eberly J. H., Phys. Rev., **A9**, 2733 (1974)
5. Arecchi E. T., DeGiorgio V., Someda C. G., Phys. Lett., **27A**, 588 (1968).
6. Crisp M. D., Phys. Rev. Lett., **22**, 820 (1969)
7. Eberly J. H., Phys. Rev. Lett., **22**, 760 (1969)
8. Lamb G. L., Jr., Phys. Rev. Lett., **25A**, 181 (1967); Rev. Mod. Phys., **43**, 99 (1971).
- Barnard T. W., Phys. Rev., **A7**, 373 (1973). (Новейшие результаты.)
9. Rubenstein J., J. Math. Phys., **11**, 258 (1970).
10. Gibbon J. D., Eilbeck J. C., J. Phys., **A5**, L122 (1972).
11. Caudrey P. J., Gibbon J. D., Eilbeck J. C., Bullough R. K., Phys. Rev. Lett., **30**, 237 (1973).
12. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H., Phys. Rev. Lett., **31**, 125 (1973).
13. Treacy E. B., в книге The Physics of Quantum Electronics, 1969, Optical Sciences Center Technical Report 45, ed. J. B. Mandelbaum, S. F. Jacobs, University of Arizona, 1969, p. 183—187.
14. Matulic L., Optics Comm., **2**, 249 (1970).
15. Lamb G. L., Jr., Phys. Rev. Lett., **31**, 196 (1973).
16. Slusher R. E., Gibbs H. M., Phys. Rev., **A5**, 1634 (1972).
- 17*. Крюков П. Г., Летохов В. С., УФН, **99**, 169 (1969)
- 18*. Подуэтов И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С., УФН, **114**, 97 (1974).
- 19*. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И., УФН, **103**, 193 (1971).

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ ИМПУЛЬСОВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение Мак-Коллом и Ханом характерного явления самоиндуцированной прозрачности в рубине стимулировало постановку многих других родственных экспериментов. В данной главе мы упомянем некоторые из них и обсудим ряд осложняющих обстоятельств, которые возникают в реальных экспериментах с $\pi\pi$ -импульсами, но не учитывались в рамках идеализированного теоретического рассмотрения предыдущей главы. Сюда относятся: появление иногда третьего энергетического уровня, достаточно сильно взаимодействующего со светом; часто наблюдаемое вырождение уровней резонансной среды; неизбежное присутствие некогерентных релаксационных явлений, особенно связанных с T'_2 , и др.

Если третий энергетический уровень близок к двум резонансным, то возникает сомнение в законности двухуровневой модели для атома, на которой базируется вся теория. В случае вырожденного поглотителя теряет силу теорема площадей (каких-либо ее обобщений получить не удалось), так что большинством преимуществ, которыми обладали все $2\pi\pi$ -импульсы в невырожденном случае, здесь будут обладать лишь 0π -импульсы. Что касается времени T'_2 , то его главное влияние сводится к нивелированию различий между когерентными явлениями, связанными с распространением $\pi\pi$ -импульсов, и некогерентным насыщением или просветлением.

§ 2. САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ

Уже в своей исходной работе [1], в которой была изложена теория самоиндуцированной прозрачности, Мак-Колл и Хан привели экспериментальные результаты, подтверждающие существование эффекта. В их очень трудном, пионерском эксперименте пришлось идти на определенные компромиссы, так что не все экспериментальные параметры отвечали идеальной ситуации, рассматриваемой в теории. Мак-Колл и Хан понимали, что световые импульсы входят в образец с неоднородным поперечным

